

# Poprawki perturbacyjne do inkluzywnego radiacyjnego rozpadu mezonu $B$

*Michał Poradziński*



Praca doktorska wykonana pod kierunkiem  
**dr hab. Mikołaja Misiaka**  
w Instytucie Fizyki Teoretycznej Wydziału Fizyki UW

Warszawa, wrzesień 2012



# Streszczenie

W niniejszej rozprawie zostały wyznaczone nieznane dotąd poprawki do szerokości inkluzywnego radiacyjnego rozpadu  $b \rightarrow X_s^p \gamma$ , który na poziomie hadronowym odpowiada inkluzywnemu rozpadowi  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ . Zdefiniowana perturbacyjnie szerokość  $\Gamma(b \rightarrow X_s^p \gamma)$  jest w przybliżeniu równa szerokości rozpadu  $\Gamma(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ .

Badanie rozpadu  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  w ramach Modelu Standardowego dostarcza ograniczeń na wiele rozszerzeń tej teorii. Szczególnie ważne są ograniczenia na modele z dwoma dubletami Higgsa, modele supersymetryczne, a także modele z dodatkowymi wymiarami czasoprzestrzennymi.

W ramach niniejszej rozprawy wykonano dwa nowe rachunki. Pierwszym było wyznaczenie wszystkich pochodzących od operatorów czterokwarkowych wkładów do szerokości rozpadu w wiodącym rzędzie w  $\alpha_s$ . Wkłady te były dotychczas zaniechywane, ponieważ są tłumione przez małe wartości współczynników Wilsona oraz przez przestrzeń fazową. Drugim rachunkiem było obliczenie poprawek w rzędzie  $\alpha_s^2$  w przybliżeniu Brodsky'ego, Lepage'a i Mackenzie, pochodzących od trzy- i czterociałowych stanów końcowych. W tym przypadku obliczone zostały nieznane wcześniej wielkości oznaczane w literaturze przez  $K_{ij}^{(2)\beta_0}$  dla  $(ij) \in \{(18), (28), (88)\}$ . Potwierdzono też rezultaty dla  $K_{ij}^{(2)\beta_0}$  z indeksami  $(ij) \in \{(11), (12), (22), (17), (27)\}$  otrzymane wcześniej przez jedną tylko grupę badawczą.

Większość wyznaczonych poprawek mieści się w granicach  $\pm 1\%$  wartości centralnej stosunku rozgałęzienia  $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ . Wyjątkiem są poprawki  $K_{ij}^{(2)\beta_0}$  dla  $(ij) \in \{(11), (12), (22)\}$ , których łączny rozmiar osiąga około 1.9%. Jawne obliczenie tych poprawek w niniejszej pracy umożliwi w przyszłości istotną redukcję niepewności teoretycznych w rozważanym stosunku rozgałęzienia.



# Podziękowania

Składam serdeczne podziękowania mojemu promotorowi dr hab. Mikołajowi Misiakowi za opiekę nad moją pracą podczas wykonywania obliczeń i przygotowywania niniejszej rozprawy. Jestem mu bardzo wdzięczny za to, że miałem okazję uczyć się od niego i obserwować jego energię i zaangażowanie w szukaniu odpowiedzi na najtrudniejsze pytania.

Dziękuję dr Tobiasowi Huberowi za liczne i owocne dyskusje na temat funkcji rozszczepienia podczas mojego pobytu w Siegen. Erudycja i chęć dyskusji sprawiły, że udział dr Wojciecha Kamińskiego w procesie zrozumienia przeze mnie wielu zagadnień jest nie do przecenienia, za co jestem mu bardzo wdzięczny.

Dziękuję także moim przyjaciołom, którzy wspierali mnie podczas tych kilku lat. Szczególnie wdzięczny jestem Ryszardowi Kosteckiemu oraz Dorocie Jareckiej za podzielenie się swoimi doświadczeniami w korzystaniu z LaTeX-a i BibTeX-a, co znacznie usprawniło moje zmagania z tą materią.

Podziękowania składam też rodzinie za wsparcie w wytrwaniu na wybranej przeze mnie ścieżce edukacji. Dziękuję także Dobromile za niezwykle efektywne motywowanie mnie do pracy. Chciałbym w końcu wyrazić swoją olbrzymią wdzięczność Ewie za motywowanie i wspieranie mnie w ukończeniu pracy nad doktoratem.

Składam podziękowania Karlsruhe Institute of Technology oraz Universität Siegen za goszczenie mnie podczas moich wizyt naukowych.

Moja praca naukowa była możliwa dzięki wsparciu finansowemu Wydziału Fizyki UW. Dodatkowo mój staż w KIT w 2010 roku był finansowany z funduszy „FLAVIANet” (MRTN-CT-2006-035482) i „HEPTOOLS” (MRTN-CT-2006-035505) oraz grantu DFG w ramach projektu SFB/TR 9 “Computational Particle Physics”. Staż na Uniwersytecie w Siegen w 2011 roku był finansowany z grantu DFG w ramach projektu MA 1187/10-2 “Theoretische Untersuchung von effektiven Feldtheorien für Präzisionsvorhersagen von  $B$ -Zerfällen”.



# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>9</b>
1.1	Uwagi wstępne . . . . .	9
1.2	Własności rozpadu $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Poprawki wiodącego rzędu od operatorów czterokwarkowych</b>	<b>21</b>
2.1	Diagramy Feynmana i wyniki analityczne . . . . .	21
2.2	Zarys rachunku . . . . .	24
2.3	Rozbieżności kolinearne . . . . .	25
2.4	Opis wyników numerycznych . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Poprawki rzędu <math>\alpha_s^2</math> w przybliżeniu BLM</b>	<b>31</b>
3.1	Definicja przybliżenia BLM . . . . .	31
3.2	Poprawka $K_{88}^{(2)\beta_0}$ . . . . .	34
3.2.1	Szczegóły rachunku . . . . .	34
3.2.2	Opis wyników numerycznych . . . . .	38
3.3	Poprawki $K_{18}^{(2)\beta_0}$ , $K_{28}^{(2)\beta_0}$ , $K_{17}^{(2)\beta_0}$ oraz $K_{27}^{(2)\beta_0}$ . . . . .	40
3.3.1	Szczegóły rachunku . . . . .	40
3.3.2	Opis wyników numerycznych . . . . .	47
3.4	Poprawki $K_{11}^{(2)\beta_0}$ , $K_{12}^{(2)\beta_0}$ oraz $K_{22}^{(2)\beta_0}$ . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>53</b>
	<b>Dodatki</b>	<b>57</b>
<b>A</b>	<b>Całkowanie po masywnej przestrzeni fazowej</b>	<b>59</b>
A.1	Parametryzacja czterociałowej przestrzeni fazowej . . . . .	59
A.2	Wzmocnienie kolinearne . . . . .	63

B	Funkcje rozszczepienia w cechowaniu aksjalnym na stożku świetlnym	69
C	Metoda Voloshina-Smitha	75
D	Funkcje podcałkowe dla poprawki $K_{22}^{(2)\beta_0}$	83
	Literatura	85



# Rozdział 1

## Wprowadzenie

### 1.1 Uwagi wstępne

Model Standardowy (SM<sup>1</sup>) jako teoria opisująca oddziaływania elektromagnetyczne, słabe oraz silne, został sformułowany ponad czterdzieści lat temu. Od tego czasu przeprowadzono olbrzymią ilość doświadczeń, które potwierdziły jego przewidywania z dużą dokładnością, utwierdzając jego pozycję w roli obowiązującej teorii oddziaływań elementarnych. Szczególnie ważne było ogłoszone w lipcu 2012 roku odkrycie w eksperymentach ATLAS i CMS bozonu skalarnego o masie około 125 GeV. Przekrój czynny na jego produkcję oraz obserwowane sposoby rozpadów zgodne są w granicach błędów z własnościami bozonu Higgsa w SM. Dzięki temu odkryciu oczekujemy w najbliższym czasie odpowiedzi na pytania o schemat łamania elektroslabej symetrii cechowania  $SU(2) \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{\text{em}}$  oraz o szczegóły mechanizmu Higgsa odpowiedzialnego za nadawanie cząstkom mas. Eksperymenty w akceleratorze LHC z pewnością zmieniają jakościowo naszą wiedzę o charakterze oddziaływań elementarnych zachodzących przy energiach rzędu od skali elektroslabej  $v \approx 246$  GeV aż do kilku TeV.

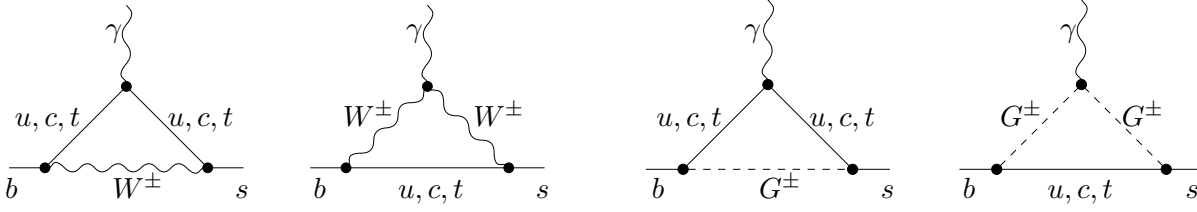
Badanie własności oddziaływań elementarnych w LHC jest jednak zadaniem trudnym, głównie ze względu na złożoność zachodzących tam zderzeń protonów i dominujący wkład oddziaływań silnych, które dostarczają bogatego tła utrudniającego analizę. Uzupełnienie eksperymentów wysokoenergetycznych stanowią niskoenergetyczne rozpady mezonów  $K$  i  $B$ , które są nie tylko użyteczne do badania oddziaływań słabych, ale także dostarczają ograniczeń na parametry modeli wykraczających poza SM, zwłaszcza na ich sektor skalarny. Należy pamiętać, że spośród oddziaływań opisywanych przez SM, oddziaływania słabe wymagają wprowadzenia największej liczby parametrów, których wartości są *a priori* dowolne, i muszą być wyznaczone eksperymentalnie.

Inkluzywny rozpad  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  jest rozpadem mezonu  $\bar{B}^0(\bar{d}b)$  lub  $B^-(\bar{u}b)$  na foton i hadrony o niezerowej całkowitej dziwności, niezawierające walencyjnych kwarków  $c$ . Należy on do najbardziej czułych niskoenergetycznych procesów słabych pod względem badania ograniczeń na nową fizykę. Aktualne teoretyczne oszacowanie jego stosunku rozgałęzienia w ramach SM wynosi [1]

$$\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)_{\text{SM}} = (3.15 \pm 0.23) \times 10^{-4}, \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup>od ang. *Standard Model*



Rysunek 1.1: Jednopętlowe jednocząstkowo nieredukowalne diagramy Feynmana dla  $b \rightarrow s\gamma$  w SM. Odpowiadają one obliczeniu przeprowadzanemu w cechowaniu 't Hoofta-Feynmana z polem tła. Należy wtedy wziąć pod uwagę pseudo-bozony Goldstone'a  $G^\pm$ , ale sprzężenie  $G^\pm W^\mp \gamma$  nie występuje.

przy cięciu  $E_\gamma > E_0 = 1.6 \text{ GeV}$  na energię fotonu w układzie spoczynkowym mezonu  $\bar{B}$ . Wynik ten zgadza się z obecną eksperymentalną średnią światową [2]

$$\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)_{\text{exp}} = (3.37 \pm 0.23) \times 10^{-4}. \quad (1.2)$$

W powyższym wyniku doświadczalnym uwzględniono wkład do błędu wynikający z uśrednienia kilku pomiarów przy różnych cięciach na energię fotonu i ekstrapolowania ich do  $E_0 = 1.6 \text{ GeV}$ , gdzie niepewność teoretyczna jest najmniejsza. Pomiary z cięciem na energię fotonu wynoszącym  $1.8 \text{ GeV} \leq E_0 \leq 2.0 \text{ GeV}$  mają znacznie mniejsze błędy związane z odjęciem tła niż te z cięciem  $E_0 = 1.7 \text{ GeV}$ . W przygotowywanych obecnie eksperymentach Belle-II [3] i Super-B [4] spodziewane jest znaczne obniżenie błędu doświadczalnego, do około  $\pm 3\%$ . W związku z tym konieczne jest zredukowanie niepewności teoretycznej do takiej samej lub mniejszej wartości.

Celem obliczeń wykonanych w ramach niniejszej pracy doktorskiej było wyznaczenie nieznanych dotąd poprawek perturbacyjnych do stosunku rozgałęzienia  $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ , co jest niezbędne dla przyszłej redukcji wspomnianej niepewności teoretycznej. Różnego rodzaju źródła tejże niepewności zostaną omówione w następnym podrozdziale.

Dominujący wkład do radiacyjnego rozpadu mezonu  $\bar{B}$  daje generowane przez neutralne prądy zmieniające zapach (FCNC<sup>2</sup>) przejście  $b \rightarrow s\gamma$  (patrz rys. 1.1). Procesami z FCNC nazywamy takie reakcje, w których w jednocząstkowo nieredukowalnych diagramach Feynmana istnieją linie fermionowe ze zmianą zapachu, ale bez zmiany ładunku elektrycznego. W SM są one generowane na poziomie jednej pętli przez wymianę bozonu  $W^\pm$  (lub pseudo-bozonu Goldstone'a  $G^\pm$ ) na linii wewnętrznej. W przypadku przejścia  $b \rightarrow s\gamma$  amplituda rozpadu jest proporcjonalna do iloczynu elementów macierzy Cabibbo-Kobayashi-Maskawy (CKM)  $V_{ts}^* V_{tb}$ , którego wartość bliska jest wartości elementu  $V_{cb}$  mnożącemu amplitudy wiodących rozpadów kwarku  $b$ . Ten fakt oraz duża masa kwarku  $t$  sprawiają, że nie działa mechanizm tłumienia Glashowa, Iliopoulosa i Maianiego (GIM) [5], w przeciwieństwie do wielu innych procesów z FCNC. Ponadto amplitudy większości innych procesów z FCNC są rzędu  $G_F \alpha^2$ , w porównaniu z  $G_F \alpha$  w przypadku  $b \rightarrow s\gamma$ . Dzięki temu stosunek rozgałęzienia  $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$  przekracza  $10^{-4}$ , czyli jest dość duży jak na proces z FCNC, co ułatwia jego eksperymentalne wyznaczenie.

Z drugiej strony czułość rozważanego procesu na ewentualne wkłady od cząstek spoza SM jest często większa niż dla typowego procesu z FCNC. Modele nowej fizyki takie jak Minimalny Su-

<sup>2</sup>od ang. *Flavour-Changing Neutral Currents*

persymetryczny Model Standardowy (MSSM<sup>3</sup>) lub model z dwoma dubletami Higgsa (2HDM<sup>4</sup>) przewidują obecność w pętli innych ciężkich cząstek. Wkłady od egzotycznych cząstek mogą być duże nawet wtedy, gdy masa tych cząstek kilkakrotnie przekracza masę bozonu  $W$ . Co więcej, amplituda rozważanego przejścia  $b \rightarrow s \gamma$  jest w SM tłumiona przez czynnik  $m_b/m_W \ll 1$ , co nie musi zachodzić w innych modelach takich jak MSSM z dużym  $\tan \beta$ . Na przykład w supersymetrycznych rozszerzeniach SM stosunek  $\Delta \mathcal{B}_{s\gamma}^{\text{SUSY}}/\mathcal{B}_{s\gamma}^{\text{SM}}$  skaluje się w przybliżeniu jak  $[100 \text{ GeV}/(\text{masy superpartnerów})]^2$ . W efekcie rozpad  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  jest czuły na nową fizykę nawet w przypadkach, w których źródłem oddziaływań łamiących zapach jest tylko macierz CKM (tzw. modele z minimalnym łamaniem zapachu).

Struktura niniejszej rozprawy jest następująca. W następnym podrozdziale przedstawiony jest zwięzły opis stanu dotychczasowych obliczeń poprawek do rozważanego rozpadu. Dzięki temu będzie możliwe bardziej szczegółowe określenie wkładu autora do tychże obliczeń. Rozdziały drugi i trzeci poświęcone są wyznaczaniu poprawek stanowiących główny przedmiot niniejszej pracy, i przedstawionych w artykułach „Completing the calculation of BLM corrections to  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ ” [6] oraz „Tree-level Contributions to  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ ” [7]. Podsumowanie zawarte jest w rozdziale czwartym. Znaczna część opisu technicznych aspektów przeprowadzonych rachunków przeniesiona jest do dodatków. Dodatki A i B poświęcone są odpowiednio całkowaniu po czterocząstkowej częściowo masywnej przestrzeni fazowej oraz wyprowadzeniu funkcji rozszczepienia (ang. *splitting function*). Omówienie metody Voloshina-Smitha [8] wykorzystanej do obliczania poprawek rzędu  $\alpha_s^2$  zawarte jest w dodatku C. W końcu, w dodatku D przedstawione są jawne wyrażenia analityczne na funkcje podcałkowe w poprawce oznaczanej przez  $K_{22}^{(2)\beta_0}$ .

## 1.2 Własności rozpadu $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$

Obliczenie stosunku rozgałęzienia  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  może być wykonane ze stosunkowo dużą dokładnością dzięki przybliżonej równości hadronowych i partonowych szerokości rozpadu

$$\Gamma(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)_{E_\gamma > E_0} = \Gamma(b \rightarrow X_s^p \gamma)_{E_\gamma > E_0} + \left[ \begin{array}{c} \text{efekty} \\ \text{nieperturbacyjne} \sim 5\% \end{array} \right], \quad (1.3)$$

gdzie  $X_s^p$  oznacza  $s$ ,  $sg$ ,  $sgg$ ,  $sq\bar{q}$  ( $q = u, d, s$ ), itd. Partonowa szerokość rozpadu  $\Gamma(b \rightarrow X_s^p \gamma)_{E_\gamma > E_0}$  jest obliczana perturbacyjnie. Duża masa kwarku  $b$ ,  $m_b \gg \Lambda \sim \Lambda_{QCD}$  oraz inkluzyny charakter rozpadu  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  przyczyniają się do tego, że poprawki nieperturbacyjne stanowią niewielki wkład do szerokości rozpadu, w granicach  $\pm 5\%$ . Najbardziej obszerna analiza poprawek nieperturbacyjnych została przedstawiona w artykule [9]. W niniejszej pracy opisane zostały jedynie poprawki perturbacyjne do przejścia  $b \rightarrow X_s^p \gamma$ .

Stosując konwencję przyjętą w artykule [10], stosunek rozgałęzienia z cięciem na energię fotonu  $E_0$  dany jest przez

$$\mathcal{B}[\bar{B} \rightarrow X_s \gamma]_{E_\gamma > E_0} = \mathcal{B}[\bar{B} \rightarrow X_c e \bar{\nu}]_{\text{exp}} \left| \frac{V_{ts}^* V_{tb}}{V_{cb}} \right|^2 \frac{6\alpha_{\text{em}}}{\pi C} [P(E_0) + N(E_0)], \quad (1.4)$$

<sup>3</sup>od ang. *Minimal Supersymmetric Standard Model*

<sup>4</sup>od ang. *Two-Higgs-Doublet-Model*

gdzie  $\alpha_{\text{em}} = \alpha_{\text{em}}(0) \simeq 1/137.036$ . Poprawki nieperturbacyjne oznaczono przez  $N(E_0)$ . Pozostałe wkłady oznaczono przez  $P(E_0)$ , i dane są one przez rozwinięcie perturbacyjne następującego stosunku szerokości rozpadów

$$\frac{\Gamma[b \rightarrow X_s \gamma]_{E_\gamma > E_0}}{|V_{cb}/V_{ub}|^2 \Gamma[b \rightarrow X_u e \bar{\nu}]} = \left| \frac{V_{ts}^* V_{tb}}{V_{cb}} \right|^2 \frac{6\alpha_{\text{em}}}{\pi} P(E_0). \quad (1.5)$$

Powyższy sposób zapisu został wybrany tak, aby zminimalizować niepewności parametryczne. Ich wartości podane poniżej pochodzą z analizy fenomenologicznej wykonanej w roku 2006 w artykule [11]. Jej aktualizacja planowana jest zimą 2012/2013, po uwzględnieniu nie opublikowanych jeszcze poprawek perturbacyjnych, których rola w oszacowaniu niepewności jest większa niż błędów parametrycznych [12].

Wprowadzenie w równaniu (1.5) normalizacji rozpadu  $b \rightarrow X_s \gamma$  względem semileptonowego rozpadu  $b \rightarrow X_u e \bar{\nu}$  służy odseparowaniu problemu zbieżności szeregu perturbacyjnego dla  $b \rightarrow X_s \gamma$  od zagadnienia wyznaczenia masy kwarku  $c$ . Semileptonowy czynnik przestrzeni fazowej dany jest przez

$$C = \left| \frac{V_{ub}}{V_{cb}} \right|^2 \frac{\Gamma[\bar{B} \rightarrow X_c e \bar{\nu}]}{\Gamma[\bar{B} \rightarrow X_u e \bar{\nu}]} = 0.580 \pm 0.016, \quad (1.6)$$

i został obliczony w artykułach [13; 14]. Wynik otrzymano korzystając z dostępnych danych doświadczalnych dla procesów semileptonowych. Gdyby czynnik normalizacyjny  $\mathcal{B}[\bar{B} \rightarrow X_c e \bar{\nu}]_{\text{exp}}$  nie został użyty w równaniu (1.4), to błąd wyznaczenia masy kwarku  $c$  dałby wkład w wysokości 2.8% (względnie) do niepewności wyznaczenia  $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ . Należałoby ponadto uwzględnić niepewności pochodzące od czynnika  $m_b^5$  oraz od iloczynu elementów macierzy CKM  $|V_{ts}^* V_{tb}|^2$ , które przekraczają 3% w obu przypadkach. Po wprowadzeniu normalizacji jak w równaniu (1.4), dominujący wkład do niepewności parametrycznej pochodzi od stałej sprzężenia oddziaływań silnych  $\alpha_s(M_Z)$  ( $\pm 2.0\%$ ), pomiaru semileptonowego stosunku rozgałęzienia  $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_c e \bar{\nu})_{\text{exp}}$  ( $\pm 1.6\%$ ) oraz od skorelowanej pary parametrów  $(C, m_c)$  ( $\pm 1.1\%$ ).

Od roku 2006 dokładność wyznaczenia wielu istotnych parametrów znacznie się poprawiła. Na przykład niepewność wyznaczenia masy kwarku  $c$  w schemacie  $\overline{\text{MS}}$  została zredukowana do 1.8% [15], co powinno zostać uwzględnione we wspomnianej wyżej aktualizacji.

Jednym z głównych problemów związanych z rachunkiem  $B \rightarrow X_s \gamma$  jest uwzględnienie krótkodystansowych efektów chromodynamiki kwantowej (QCD<sup>5</sup>). Pochodzą one od wymiany twardych gluonów między liniami kwarkowymi w diagramach w wiodącym rzędzie elektroslabym. Trudnością w uwzględnieniu poprawek QCD w rozważanej szerokości rozpadu jest obecność dużych logarytmów  $\alpha_s \ln(M_W^2/m_b^2) \simeq 0.7$  pogarszających zbieżność szeregu perturbacyjnego. W celu jej polepszenia wysumowuje się duże logarytmy w każdym rzędzie rozwinięcia w stałej sprzężenia  $\alpha_s$ . Używa się w tym celu niskoenergetycznej teorii efektywnej, która powstaje po odprzęgnięciu z SM kwarku  $t$ , bozonu Higgsa oraz bozonów elektroslabych  $W$  i  $Z$ . Narzędziem do konstrukcji teorii efektywnej jest rozwinięcie operatorowe (OPE<sup>6</sup>) [16]. Oddziaływania zmieniające zapach opisywane są przez operatory  $P_i$  wymiaru wyższego niż 4, przy czym operatory wymiarów  $d = 5$  i  $d = 6$  dają wiodący wkład do procesu. Operatory o większym wymiarze ( $d > 6$ ) są tłumione względem wyrazów wiodących przez czynnik  $m_b^2/M_W^2 < 0.005$ . Rolę stałych sprzężenia

<sup>5</sup>od ang. *Quantum Chromodynamics*

<sup>6</sup>z ang. *Operator Product Expansion*

przy wierzchołkach zmieniających zapach (operatorach)  $P_i$  pełnią współczynniki Wilsona, które zależą od skali renormalizacji  $\mu$ .

Dopóki zaniedbywane są elektrosłabe poprawki wyższego rzędu, odpowiedni lagranżjan efektywny przy skali renormalizacji  $\mu$  dany jest przez

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{QCD} \times \text{QED}}(u, d, s, c, b) + \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left[ V_{ts}^* V_{tb} \sum_{i=1}^8 C_i(\mu) P_i + V_{us}^* V_{ub} \sum_{i=1}^2 C_i(\mu) (P_i - P_i^u) \right], \quad (1.7)$$

gdzie

$$\begin{aligned} P_1^u &= (\bar{s}_L \gamma_\mu T^a u_L)(\bar{u}_L \gamma^\mu T^a b_L), \\ P_2^u &= (\bar{s}_L \gamma_\mu u_L)(\bar{u}_L \gamma^\mu b_L), \\ P_1 &= (\bar{s}_L \gamma_\mu T^a c_L)(\bar{c}_L \gamma^\mu T^a b_L), \\ P_2 &= (\bar{s}_L \gamma_\mu c_L)(\bar{c}_L \gamma^\mu b_L), \\ P_3 &= (\bar{s}_L \gamma_\mu b_L) \sum_q (\bar{q} \gamma^\mu q), \\ P_4 &= (\bar{s}_L \gamma_\mu T^a b_L) \sum_q (\bar{q} \gamma^\mu T^a q), \\ P_5 &= (\bar{s}_L \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} b_L) \sum_q (\bar{q} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} q), \\ P_6 &= (\bar{s}_L \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} T^a b_L) \sum_q (\bar{q} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} T^a q), \\ P_7 &= \frac{e}{16\pi^2} m_b (\bar{s}_L \sigma^{\mu\nu} b_R) F_{\mu\nu}, \\ P_8 &= \frac{g}{16\pi^2} m_b (\bar{s}_L \sigma^{\mu\nu} T^a b_R) G_{\mu\nu}^a. \end{aligned} \quad (1.8)$$

W operatorach  $P_{3-6}$  suma po  $q$  uwzględnia wszystkie kwarki występujące w teorii efektywnej  $q = u, d, s, c, b$ . Macierze  $T^a$  są generatorami reprezentacji fundamentalnej grupy kolorowej SU(3), a  $F_{\mu\nu}$  i  $G_{\mu\nu}^a$  oznaczają odpowiednio tensory pól fotonowego i gluonowego.

Zmieniające zapach operatory  $P_i$  można sklasyfikować w następujący sposób:

- operatory prąd-prąd:  $P_{1,2}$  i  $P_{1,2}^u$ ,
- operatory pingwinowe:  $P_{3-6}$ ,
- operatory dipolowe: fotonowy  $P_7$  oraz gluonowy  $P_8$ .

Wkłady zawierające interferencje  $(P_7, P_7)$  i  $(P_7, P_{1,2})$  dają dominujący wkład do rozważanej szerokości rozpadu.

Rachunek w wiodącym rzędzie i wyższych wykonuje się, w ramach teorii efektywnej, w trzech etapach:

1. Zszycie: Znajdowane są współczynniki Wilsona przy skali renormalizacji  $\mu_0 \sim M_W, m_t$ . Wykorzystuje się przy tym warunek równości funkcji Greena SM i teorii efektywnej w wiodącym rzędzie rozwinięcia w stosunku  $p_{\text{ext}}/(M_W, m_t)$ , gdzie  $p_{\text{ext}}$  oznacza pędy cząstek zewnętrznych.

2. Mieszanie (ewolucja): Rozwiązywane są równania grupy renormalizacji (RGE<sup>7</sup>) teorii efektywnej

$$\mu \frac{d}{d\mu} C_i(\mu) = C_j(\mu) \gamma_{ji}(\mu). \quad (1.9)$$

Współczynniki Wilsona są ewoluowane od skali elektroslabej  $\mu_0 \sim M_W, m_t$  do skali niskoenergetycznej  $\mu_b \sim m_b/2$ . Informacja o macierzy wymiaru anomального  $\gamma_{ij}(\mu)$ , opisującej tę ewolucję jest zawarta w rozbieżnościach ultrafioletowych teorii efektywnej, przy czym trzeba uwzględnić, że operatory  $P_i$  mieszają się przy renormalizacji. Przeewoluowane współczynniki Wilsona rozwijamy w silnej stałej sprzężenia  $\alpha_s(\mu_b)$  następująco:

$$C_i(\mu_b) = C_i^{(0)}(\mu_b) + \frac{\alpha_s(\mu_b)}{4\pi} C_i^{(1)}(\mu_b) + \left( \frac{\alpha_s(\mu_b)}{4\pi} \right)^2 C_i^{(2)}(\mu_b) + \dots, \quad (1.10)$$

gdzie  $C_i^{(n)}(\mu_b)$  zależą od stałej  $\alpha_s$  tylko poprzez stosunek  $\eta \equiv \alpha_s(\mu_0)/\alpha_s(\mu_b)$ . W efekcie, przy ustalonym rzędzie rozwinięcia w silnej stałej sprzężenia  $\alpha_s$ , rozwija się tylko w potęgach  $\alpha_s(\mu_b)$  zamiast w potęgach iloczynu  $\alpha_s(M_W) \ln(M_W^2/m_b^2)$ . Następuje zatem wysumowanie dużych logarytmów  $\alpha_s(M_W) \ln(M_W^2/m_b^2)$ , i zbieżność rozwinięcia w silnej stałej sprzężenia  $\alpha_s$  poprawia się. Fakt ten jest głównym uzasadnieniem wprowadzenia teorii efektywnej.

3. Wyznaczanie elementów macierzowych: Obliczane są odpowiednie amplitudy przejścia  $b \rightarrow X_s^p \gamma$  w teorii efektywnej, przy skali renormalizacji  $\mu_b \sim m_b/2$ .

Wiodące przybliżenie logarytmiczne (LLA<sup>8</sup>) oznacza wysumowanie dużych logarytmów postaci  $(\alpha_s(M_W) \ln(M_W^2/m_b^2))^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . W kolejnym rzędzie (NLL<sup>9</sup>) wysumowuje się logarytmy postaci  $\alpha_s(\alpha_s(M_W) \ln(M_W^2/m_b^2))^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Zwyczajowo pierwszy nieznikający rząd rozwinięcia w pewnej stałej sprzężenia  $\alpha$  określa się skrótem LO<sup>10</sup>, kolejne zaś mianem NLO<sup>11</sup>, NNLO<sup>12</sup> itd. W przypadku perturbacyjnych poprawek QCD do przejścia  $b \rightarrow X_s^p \gamma$  rachunek w rzędzie LO oznacza, że ewolucję przy użyciu macierzy wymiaru anomального wykonano w przybliżeniu wiodących logarytmów. Natomiast zszycie współczynników Wilsona oraz elementy macierzowe operatorów teorii efektywnej przy skali  $\mu_b$  obliczono w rzędzie  $\alpha_s^0$ . Rachunek w rzędzie NLO oznacza zatem, że macierz wymiaru anomального wyznacza się w przybliżeniu NLL a współczynniki Wilsona i elementy macierzowe rozwija się do rzędu  $\alpha_s$ . Analogiczna nomenklatura obowiązuje dla rachunków w wyższych rzędach.

Perturbacyjny wkład do szerokości rozpadu  $P(E_0)$  w równaniu (1.5) wyraża się przez funkcję kwadratową we współczynnikach Wilsona

$$P(E_0) = \sum_{i,j=1}^8 C_i^{\text{eff}}(\mu_b) C_j^{\text{eff}}(\mu_b) K_{ij}(E_0, \mu_b). \quad (1.11)$$

<sup>7</sup>od ang. *Renormalization Group Equations*

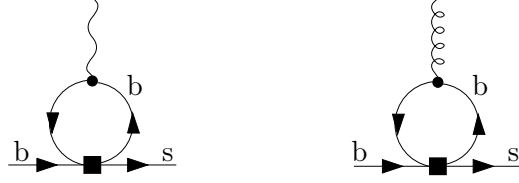
<sup>8</sup>od ang. *Leading Logarithmic Approximation*

<sup>9</sup>od ang. *Next-to-Leading Logarithms*

<sup>10</sup>od ang. *Leading Order*

<sup>11</sup>*Next-to-Leading Order*

<sup>12</sup>*Next-to-Next-to-Leading Order*



Rysunek 1.2: Diagramy jednopętlowe odpowiedzialne za różnicę między  $C_{7,8}$  a  $C_{7,8}^{\text{eff}}$ . Wierzchołki generowane przez  $P_{3-6}$  oznaczono kwadratami.

W równaniu (1.11) i dalszych wprowadzono tzw. efektywne współczynniki Wilsona  $C_i^{\text{eff}}(\mu_b)$ , będące kombinacjami liniowymi współczynników  $C_i(\mu_b)$

$$C_i^{\text{eff}}(\mu) = \begin{cases} C_i(\mu), & \text{for } i = 1, \dots, 6, \\ C_7(\mu) + \sum_{j=1}^6 y_j C_j(\mu), & \text{for } i = 7, \\ C_8(\mu) + \sum_{j=1}^6 z_j C_j(\mu), & \text{for } i = 8. \end{cases} \quad (1.12)$$

Liczby  $y_i$  i  $z_i$  są zdefiniowane tak, aby w wiodącym rzędzie rachunku zaburzeń amplitudy przejść  $b \rightarrow s\gamma$  i  $b \rightarrow sg$  były proporcjonalne odpowiednio do współczynników  $C_7^{\text{eff}}(\mu)$  i  $C_8^{\text{eff}}(\mu)$ . Oprócz operatorów dipolowych, wkład do tych amplitud w wiodącym rzędzie mogą dawać także diagramy jednopętlowe z operatorami  $P_{3-6}$ , w których emisja fotonu lub gluonu następuje z pętli kwarku  $b$  (rys. 1.2). Wkłady te są proporcjonalne (również poza powłoką masy) do diagramów drzewowych z operatorami dipolowymi  $P_7$  i  $P_8$ . Mogą być one zatem włączone do rachunku poprzez redefinicję współczynników Wilsona. Liczby  $y_i$  oraz  $z_i$  w równaniu (1.12) okazują się być różne od zera w regularyzacji wymiarowej z antykomutującą w pełni macierzą  $\gamma_5$ . Schemat renormalizacji  $\overline{\text{MS}}$  oznaczany jest w tym przypadku przez NDR<sup>13</sup>.

Warto zaznaczyć, że rozważane amplitudy z operatorami  $P_{3-6}$  dają zerowy wkład gdy uogólnimy macierz  $\gamma_5$  do  $D$  wymiarów metodą t'Hoofta-Veltmana (HV) [17], a także we wszystkich czterowymiarowych schematach regularyzacji. W tych przypadkach efektywne współczynniki Wilsona nie różnią się od standardowych  $C_i(\mu_b)$ , co kompensowane jest przez zmiany w macierzy wymiaru anormalnego [18]. W schemacie NDR mamy  $\vec{y} = (0, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{9}, -\frac{20}{3}, -\frac{80}{9})$  i  $\vec{z} = (0, 0, 1, -\frac{1}{6}, 20, -\frac{10}{3})$  [19]. Ze względów praktycznych, przy obliczaniu poprawek wyższego rzędu w stałej  $\alpha_s$ , definicja (1.12) efektywnych współczynników Wilsona  $C_i^{\text{eff}}$  nie zmienia się.

Współczynniki Wilsona  $C_i^{\text{eff}}(\mu_b)$  w schemacie NDR zostały obliczone do rzędu NNLO kilka lat temu [20; 21]. Ich wartości w rzędach LO i NLO podane są w tabeli 1.1. Zostały one obliczone dla skal renormalizacji  $\mu_b = 2.5 \text{ GeV}$  i  $\mu_0 = 160 \text{ GeV}$ . Przy takim wyborze skal wkład drugiego rzędu do  $C_7^{\text{eff}}$  wynosi  $C_7^{(2)\text{eff}}(\mu_b) \simeq 18.31$ . Jest to jedyny wkład rzędu  $\alpha_s^2$  do współczynników Wilsona przy skali  $\mu_b$ , który ma wpływ na szerokość rozważanego rozpadu w rzędzie NNLO.

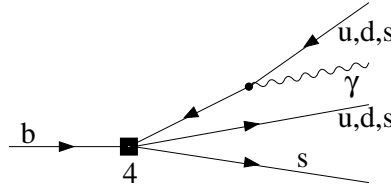
Macierz  $K_{ij}$  z równania (1.11) przyjmuje w wiodącym rzędzie postać

$$K_{ij} = \delta_{i7}\delta_{j7} + T_{ij}^{(0)} + \mathcal{O}(\alpha_s), \quad (1.13)$$

<sup>13</sup>od ang. *Naive Dimensional Regularization*

$i$	$C_i^{(0)\text{eff}}(\mu_b)$	$C_i^{(1)\text{eff}}(\mu_b)$
1	-0.8144	15.392
2	1.0611	-2.078
3	-0.0125	0.099
4	-0.1224	-0.418
5	0.0012	-0.021
6	0.0026	-0.015
7	-0.3688	1.989
8	-0.1710	-0.613

Tablica 1.1: Efektywne współczynniki Wilsona  $C_i^{(k)\text{eff}}(\mu_b)$  w rzędzie LO i NLO dla  $\mu_b = 2.5 \text{ GeV}$ . Jako skalę zszycia SM z teorią efektywną przyjęto  $\mu_0 = 160 \text{ GeV}$ .



Rysunek 1.3: Przykład diagramu dającego wkład do  $T_{ij}^{(0)}$ .

gdzie  $T_{ij}^{(0)}$ ,  $i, j = 1, \dots, 6$  oznacza wkłady drzewowe od przejść  $b \rightarrow s\bar{q}q\gamma$  ( $q = u, d, s$ ), w których foton emitowany jest z linii kwarków zewnętrznych (patrz np. rys. 1.3). Przejścia takie mogą być generowane przez operatory  $P_{1,2}^u$  i  $P_{3-6}$ , a wpływ na szerokość rozpadu mają wszystkie interferencje między nimi. Efekt ten jest formalnie wiodącego rzędu, lecz był dotąd zaniedbywany, gdyż numerycznie jest on mały nawet w porównaniu z niektórymi wkładami rzędu NNLO. Wynika to z faktu, że współczynniki Wilsona  $C_i^{(0)}$  operatorów pingwinowych są nieduże. Ich wartości przy skali  $\mu_b$  podane w tabeli 1.1 pozwalają stwierdzić, że  $|C_{3,5,6}^{(0)\text{eff}}/C_7^{(0)\text{eff}}|^2 < |C_4^{(0)\text{eff}}/C_7^{(0)\text{eff}}|^2 \sim 0.1$ , co oznacza tłumienie rozważanych wkładów o czynnik rzędu 10 w porównaniu z wyrazem wiodącym w  $P(E_0)$  (1.11). Kolejny czynnik rzędu 10 otrzymujemy uwzględniając wysokie cięcia na energię fotonu  $E_\gamma > E_0 \sim m_b/3$  odpowiadające niewielkiemu fragmentowi czterociałowej przestrzeni fazowej dla  $b \rightarrow s\bar{q}q\gamma$ . Wkłady od  $P_{1,2}^u$  tłumione są w ten sam sposób przez przestrzeń fazową, oraz dodatkowo przez mały element  $V_{ub}$  macierzy CKM. To ostatnie tłumienie jest silniejsze od tłumienia przez małe współczynniki Wilsona w przypadku  $P_{3-6}$ . Wkłady od poprawek drzewowych  $T_{ij}^{(0)}$  do wartości stosunku rozgałęzienia  $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s\gamma)$  były w artykule [10] oceniane na mniej niż 1% wartości centralnej. Mimo tego, oszacowanie ich wpływu na niepewność teoretyczną przewidywania SM (1.1) w przyszłej aktualizacji rachunku NNLO wymaga jawnego wyznaczenia tych wkładów.

Na niniejszą pracę doktorską składają się dwa niezależne obliczenia, z których pierwsze dotyczy właśnie wyznaczenia wielkości  $T_{ij}^{(0)}$ . Szczegóły rachunku i analiza wyników zostały opublikowane w artykule [7] i przedstawione są w rozdziale 2.

Drugi rachunek będący podstawą tej rozprawy obejmuje poprawki silne rzędu  $\alpha_s^2$ . Perturba-



cyjnie obliczalne efekty oddziaływań silnych są szczególnie istotne w rozważanym rozpadzie. Uwzględnienie wywoływanej przez te oddziaływania ewolucji współczynników Wilsona w wiodącym przybliżeniu logarytmicznym zwiększa szerokość rozpadu  $b \rightarrow s\gamma$  ponad dwukrotnie [22; 23]. Problemem obliczeń w wiodącym rzędzie jest duża zależność wyznaczonej szerokości rozpadu od skali  $\mu_b$ , sięgająca  $\pm 30\%$ . Rozważa się zwykle zakres skal  $\mu_b \in (m_b/4, m_b)$  z wartością centralną wynoszącą  $m_b/2$ . Wartość centralna w przybliżeniu odpowiada sumie energii partonów w stanie końcowym, które następnie hadronizują. Resztę energii z rozpadu kwarku  $b$  zabiera foton. Wartość maksymalna rozkładu energii fotonu znajduje się w okolicach połowy masy kwarku  $b$ . Redukcja niepewności związanej z zależnością od skali  $\mu_b$  była główną motywacją do wykonania rachunku w rzędzie NLO.

W celu opisanie poprawek wyższego rzędu rozwiniemy macierz  $K_{ij}$  w szereg względem silnej stałej sprzężenia  $\alpha_s$

$$K_{ij} = K_{ij}^{(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} K_{ij}^{(1)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 K_{ij}^{(2)} + \dots \quad (1.14)$$

Wszystkie trzy etapy kilkuletniego rachunku w rzędzie NLO zostały ukończone w 2002 roku [24; 25]. Nie dotyczy to jednak wkładów od przejść  $b \rightarrow s\gamma q\bar{q}$  z emisją fotonu z zewnętrznej linii kwarkowej. Wkłady takie są proporcjonalne do iloczynów  $C_i C_j \alpha_s$ , gdzie  $C_i \in \{1, 8\}$  oraz  $j \in \{3, 6\}$ . Ulegają one podobnemu tłumieniu przez przestrzeń fazową i małe współczynniki Wilsona jak wspomniana wyżej wielkość  $T_{ij}^{(0)}$ . Podobnie do niej, były one do tej pory zanedbywane, gdyż nawet przed uwzględnieniem tłumienia ze strony czterocząstkowej przestrzeni fazowej można oszacować ich wielkość numeryczną jako podobną do poprawek rzędu  $\alpha_s^2$ .

W zależności od sposobu wyboru konwencji w rzędzie LO, numeryczne wartości poprawek NLO wahają się od 0 do 30%. Uwzględnienie ich pozwoliło zredukować zależność obliczonej szerokości rozpadu od skali renormalizacji do poziomu poniżej  $\pm 10\%$ . Pojawiło się jednak nowe źródło niepewności, nieobecne w wiodącym rzędzie QCD, mianowicie zależność od masy kwarku  $c$ . Masa kwarku  $c$  pojawia się przy obliczaniu elementów macierzowych  $\langle s\gamma | P_{1,2} | b \rangle$ , które znikają w wiodącym rzędzie. Niezerowe wkłady pojawiają się dopiero w rzędzie  $O(\alpha_s)$  (poprzez stosunek  $m_c/m_b$ ) przy obliczaniu diagramów zawierających pętle z kwarkiem  $c$ . W 2001 roku M. Misiak i P. Gambino [10] pokazali, że dowolność definicji (schematu renormalizacji) masy kwarku  $c$  wprowadza dodatkową niepewność do szerokości rozpadu  $\Gamma(b \rightarrow X_S^p \gamma)$ . Zmieniając stosunek mas  $m_c/m_b$  w przedziale  $0.18 \leq m_c/m_b \leq 0.31$  zawierającym zarówno wartość masy  $m_{c,pole}$  w schemacie *on-shell*, jak i masy w schemacie  $\overline{MS}$  zależnej od skali renormalizacji  $\mu_c$ ,  $\overline{m}_c(\mu_c)$ , gdzie  $\mu_c \in (m_c, m_b)$ , otrzymano różnice sięgające 10% szerokości rozpadu [26; 27]. Zależność od masy kwarku  $c$  stanowi dominujący wkład do niepewności teoretycznej w rzędzie NLO. Formalnie rzecz biorąc, w rzędzie NLO wszystkie schematy renormalizacji dla masy kwarku  $c$  są dopuszczalne, a różnica między nimi jest kompensowana dopiero w rzędzie NNLO rachunku zaburzeń. Dlatego też zależność od skali renormalizacji masy kwarku  $c$  może być zredukowana dopiero po uwzględnieniu poprawek w rzędzie NNLO. Autorzy pracy [28] pokazali, że uwzględnienie poprawek NNLO redukuje niepewność pochodzącą od skali  $\mu_c$  ponad dwukrotnie, co stanowiło główną motywację do wykonania tego rachunku.

Pierwsze dwa etapy rachunku w rzędzie NNLO posłużyły do znalezienia współczynników Wilsona teorii efektywnej przy skali  $\mu_b$ , i zostały ukończone kilka lat temu. Etap pierwszy obejmujący wyznaczenie warunków zszycia SM z teorią efektywną przy skali  $\mu_0$  wymagał obliczenia trzypętlowych diagramów w przypadku operatorów  $P_7$  i  $P_8$  [20] oraz dwupętlowych w pozosta-

łych przypadkach [29]. W ramach drugiego etapu obliczono w trzech pętlach macierz wymiaru anomального opisującą mieszanie współczynników Wilsona  $C_i$  osobno dla  $i = 1, \dots, 6$  oraz dla  $i = 7, 8$  [30; 31]. Rachunek opisujący mieszanie operatorów czterokwarkowych ( $i = 1, \dots, 6$ ) z operatorami dipolowymi ( $i = 7, 8$ ) wymagał rachunku czteropętlowego [21].

Przy obliczaniu elementów macierzowych teorii efektywnej (etap trzeci) w rzędzie NNLO wystarczy ograniczyć się do poprawek proporcjonalnych do iloczynu współczynników Wilsona  $C_i C_j$  dla  $i, j \in \{1, 2, 7, 8\}$ . Pozostałe poprawki są numerycznie małe, ze względu na wspomniane wyżej małe wartości pozostałych współczynników. W poniższym opisie poprawek w rzędzie NNLO operatory  $P_1$  i  $P_2$  będą traktowane jako jeden operator  $P_2$ , gdyż różnią się one jedynie obecnością macierzy Gell-Manna w  $P_1$ .

Obliczenia w rzędzie NNLO sprowadzają się do znalezienia sześciu niezależnych wkładów, które można podzielić na dwie klasy:

- wkłady z udziałem  $P_7$  :  $K_{77}^{(2)}$ ,  $K_{78}^{(2)}$ ,  $K_{27}^{(2)}$ ,
- pozostałe wkłady:  $K_{22}^{(2)}$ ,  $K_{28}^{(2)}$ ,  $K_{88}^{(2)}$ .

Numerycznie największymi z nich są  $K_{77}^{(2)}$  i  $K_{27}^{(2)}$ . Aktualny status obliczeń poprawek z udziałem operatora dipolowego  $P_7$  jest następujący:

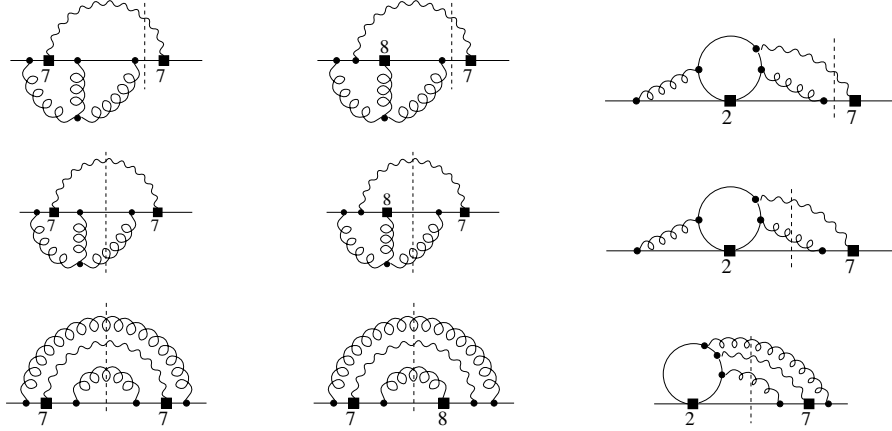
- $K_{77}^{(2)}$  zostało wyznaczone w pracach [32; 33; 34; 35],
- $K_{78}^{(2)}$  zostało wyznaczone w pracach [36; 37],
- $K_{27}^{(2)}$  jest w trakcie obliczania [38].

Przykłady diagramów dających wkład do poprawek  $K_{77}^{(2)}$ ,  $K_{78}^{(2)}$  i  $K_{27}^{(2)}$  zostały przedstawione odpowiednio w kolumnach na rys. 1.4. Cięcie unitarne na propagatorach odzwierciedla rodzaj interferencji, która zachodzi w danym procesie. Diagramy w pierwszym, drugim i trzecim wierszu zawierają przykłady odpowiednio dwu-, trzy- i czterociałowych stanów końcowych. Kasowanie rozbieżności podczerwonych zachodzi między wkładami o różnych ilościach cząstek w stanach końcowych, dlatego też muszą być one obliczane łącznie.

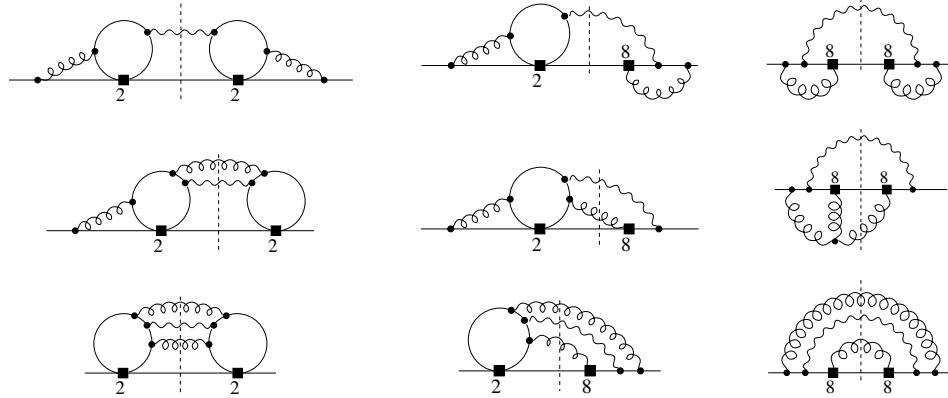
Wkład do pozostałych poprawek ( $K_{22}^{(2)}$ ,  $K_{28}^{(2)}$  i  $K_{88}^{(2)}$ ) dają diagramy, których przykłady są zamieszczone na rys. 1.5. Diagramy w pierwszym wierszu zawierają interferencje znanych z rachunku NLO amplitud rozpadu do dwuciałowych stanów końcowych. Mogą one być rozpatrywane niezależnie od pozostałych, ponieważ nie zawierają rozbieżności podczerwonych. Diagramy w wierszach drugim i trzecim są przykładami rozpadów w kanałach trzy- i czterociałowych. Te wkłady znane są jedynie w przybliżeniu Brodsky'ego, Lepage'a i Mackenzie (BLM) [39].

Poprawki NNLO mogą być rozseparowane na poprawki BLM i na pozostałe (non-BLM). Praktyka wskazuje, że poprawki BLM często stanowią dobre oszacowanie całej rozważanej poprawki (BLM + non-BLM) w przypadkach, gdy poprawki non-BLM są znane. Dlatego też mówi się o *przybliżeniu* BLM. Przybliżenie to zostanie szczegółowo opisane w rozdziale 3.

Dokończenie obliczania poprawek w przybliżeniu BLM było drugim z rachunków stanowiących podstawę niniejszej pracy doktorskiej. Jego wyniki zostały opublikowane w artykule [6]. Dotyczą



Rysunek 1.4: Przykłady diagramów Feynmana w poprawkach  $K_{77}^{(2)}$ ,  $K_{78}^{(2)}$  i  $K_{27}^{(2)}$  zapisane przy wykorzystaniu twierdzenia optycznego jako wkłady do części urojonych propagatora kwarku  $b$ . Pionowe linie przerywane oznaczają cięcia unitarne



Rysunek 1.5: Przykłady diagramów Feynmana dających wkład do poprawek  $K_{22}^{(2)}$ ,  $K_{28}^{(2)}$  i  $K_{88}^{(2)}$ .

one nieznanymi wcześniej wielkościami  $K_{28}^{(2)}$  i  $K_{88}^{(2)}$ , a także weryfikacji wyznaczonych wiele lat wcześniej wkładów BLM do  $K_{22}^{(2)}$  i  $K_{27}^{(2)}$  [40]. Wyniki dotyczące  $K_{88}^{(2)}$  zgodne są z opublikowanymi równocześnie rezultatami niezależnego obliczenia A. Ferroglii i U. Haischa [41].

Znane wkłady do szerokości rozpadu od procesów w kanałach trzy- i czterociałowych bez udziału operatora  $P_7$  wynoszą łącznie poniżej 4% wartości centralnej. Dotyczy to sumy poprawek w rzędach NLO i NNLO, przy czym te ostatnie uwzględnione zostały w przybliżeniu BLM. Ich stosunkowo małe znaczenie wywołane jest wysokim cięciem  $E_0$  na energię fotonu i związanym z tym tłumieniem ze strony przestrzeni fazowej. Szacuje się, że nieznane poprawki NNLO wychodzące poza przybliżenie BLM (poprawki non-BLM) dają wkład do niepewności teoretycznej porównywalny numerycznie z nieznanymi wkładami rzędu  $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ , i w związku z tym można je zaniedbać.

Poprawka  $K_{27}^{(2)}$  jest ostatnim istotnym, nieobliczonym jeszcze wkładem w rzędzie NNLO. Znalazienie jej jest tym ważniejsze, że jest ona źródłem wspomnianej wyżej niepewności pochodzącej

od stosunku mas  $m_c/m_b$ . Dotychczas poprawka ta została obliczona jedynie w przybliżeniu BLM dla dowolnej wartości  $m_c$  [40; 42]. Wkłady non-BLM zostały natomiast wyznaczone [43; 11] w granicy  $m_c \gg m_b/2$ , a następnie ekstrapolowane do mierzonych wartości  $m_c$  przy założeniach opartych na wartościach odpowiednich poprawek BLM w punkcie  $m_c = 0$ . Rachunek oparty na ekstrapolacji w  $m_c$  wprowadza dodatkową niepewność o wartości około  $\pm 3\%$  szerokości rozpadu. Pełny rachunek poprawki  $K_{27}^{(2)}$  dla dowolnej wartości  $m_c/m_b$  mający usunąć tę niepewność jest w toku [38].

Poprawki perturbacyjne od oddziaływań elektroślabych nie są zaniedbywalne, i dają wkład  $-3.6\%$  do szerokości rozpadu [44; 45; 46; 47].

Podsumowując, na niepewność teoretyczną obliczeń stosunku rozgałęzienia rozpadu  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  (równ. 1.1), wynoszącą około  $\pm 7\%$ , składają się następujące czynniki [1]:

- efekty nieperturbacyjne ( $\pm 5\%$ ),
- niepewność parametryczna ( $\pm 3\%$ ),
- niepewność pochodząca od nieznanymi poprawek perturbacyjnych wyższego rzędu ( $\pm 3\%$ ),
- niepewność ekstrapolacji w  $m_c$  ( $\pm 3\%$ ).

Wszystkie te niepewności zostały w równaniu (1.1) potraktowane jako niezależne i dodane w kwadratach.

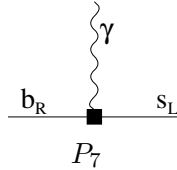
Jak widać z powyższych rozważań, poziom technicznej złożoności niezbędnych rachunków jest dość wysoki. Wykonane w niniejszej pracy obliczenie poprawek drzewowych wiodącego rzędu oraz poprawek NNLO w przybliżeniu BLM jest jednym z elementów zbiorowego wysiłku, którego celem jest utrzymanie niepewności teoretycznej wyznaczenia stosunku rozgałęzienia  $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$  na poziomie porównywalnym z błędami doświadczalnymi w eksperymentach wykonywanych obecnie i w niedalekiej przyszłości. Tylko pod tym warunkiem możliwe będzie efektywne wykorzystanie wzrostu dokładności pomiarów tej wielkości do nakładania ograniczeń na rozszerzenia SM. Twierdzenie to pozostaje w mocy niezależnie od tego, czy i jakie odchylenia od przewidywań SM zostaną zaobserwowane w innych zjawiskach.

## Rozdział 2

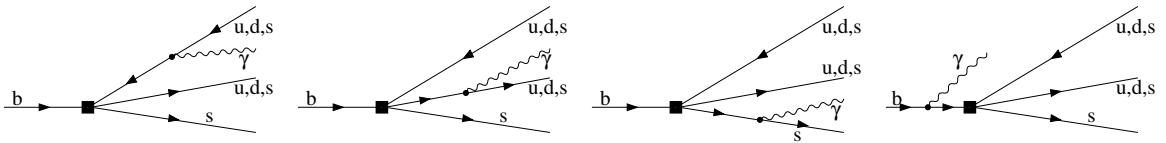
# Poprawki wiodącego rzędu od operatorów czterokwarkowych

### 2.1 Diagramy Feynmana i wyniki analityczne

Na poziomie teorii efektywnej dominujący wkład do szerokości rozpadu  $b \rightarrow X_s^p \gamma$  w wiodącym rzędzie (LO) daje dwuciałowy rozpad kwarku  $b$  na foton i kwark  $s$ . Jest on generowany przez fotonowy operator dipolowy  $P_7$  (patrz rys. 2.1). Wkłady w wiodącym rzędzie dają także przejścia z czterociałowym stanem końcowym  $b \rightarrow s \gamma q \bar{q}$  ( $q = u, d, s$ ) przedstawione na rys. 2.2. Są one generowane przez operatory typu prąd-prąd  $P_{1,2}^u$ , oraz operatory pingwinowe  $P_{3-6}$ .



Rysunek 2.1: Diagram drzewowy dający w wiodącym rzędzie dominujący wkład do przejścia  $b \rightarrow s \gamma$



Rysunek 2.2: Diagramy drzewowe dające wkład do przejścia  $b \rightarrow s \gamma q \bar{q}$

Jak argumentowano w rozdziale 1.2, potrzeba redukcji niepewności teoretycznej w rozważanej szerokości rozpadu wymaga obliczenia poprawek, które wcześniej były zaniedbywane. Nie-wielka wartość współczynników Wilsona  $C_{3-6}(\mu_b)$  oraz stosunku elementów macierzy CKM  $\left| \frac{V_{us}^* V_{ub}}{V_{ts}^* V_{tb}} \right| \simeq 0.02$ , a także tłumienie ze strony przestrzeni fazowej, były powodem pominięcia

generowanych przez operatory czterokwarkowe drzewowych przejść  $b \rightarrow s\gamma q\bar{q}$  na etapie obliczeń LO i NLO. Fakt ten wspomniany został w Dodatku E artykułu [47]. Wraz z potrzebą redukcji niepewności teoretycznej na etapie NNLO, konieczne stało się wyznaczenie jawnej postaci tego typu poprawek.

W ramach niniejszej pracy obliczono, w wiodącym rzędzie rachunku zaburzeń, wszystkie przejścia typu  $b \rightarrow s\gamma q\bar{q}$  pochodzące od operatorów typu prąd-prąd oraz operatorów pingwinowych. Rezultaty zostały opublikowane w artykule [7].

Zacznijmy od przedstawienia ostatecznych wyników tego rachunku w postaci analitycznej. Obliczony wkład do szerokości rozpadu  $b \rightarrow X_s^p \gamma$

$$\Delta\Gamma[b \rightarrow X_s^p \gamma]_{4\text{-quark}}^{\text{LO}} = \frac{G_F^2 \alpha_{\text{em}} m_b^5}{32\pi^4} |V_{ts}^* V_{tb}|^2 \left( T_1(\delta) W_1 + T_2(\delta) W_2 + T_3(\delta) W_3 \right) \quad (2.1)$$

wyraża się przez trzy funkcje  $T_i(\delta)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , które zależą od cięcia na energię fotonu  $E_0$  poprzez parametr  $\delta = 1 - 2E_0/m_b$  zmieniający się w granicach od 0 do 1. Każda z tych funkcji mnożona jest w równaniu 2.1 przez wielomian  $W_i$  kwadratowy we współczynnikach Wilsona  $C_k \equiv C_k(\mu_b)$ . Funkcje  $T_i(\delta)$  dane są przez

$$\begin{aligned} T_1(\delta) &= \left( -\frac{5}{3}\rho(\delta) - \frac{2}{9}\omega(\delta) \right) \ln \frac{m_b^2 \delta}{\sqrt[3]{m_u^4 m_d m_s}} + \frac{109}{18}\delta + \frac{17}{18}\delta^2 - \frac{191}{108}\delta^3 + \frac{23}{16}\delta^4 + \frac{79}{18}\ln(1-\delta) \\ &\quad - \frac{5}{3}\text{Li}_2(\delta) + \frac{1}{9}\rho(\delta) \ln \frac{m_s^5}{m_u^4 m_d}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} T_2(\delta) &= \left( -\frac{1}{2}\rho(\delta) - \frac{2}{27}\omega(\delta) \right) \ln \frac{m_b^2 \delta}{m_u^2} + \frac{187}{108}\delta + \frac{7}{18}\delta^2 - \frac{395}{648}\delta^3 + \frac{1181}{2592}\delta^4 + \frac{133}{108}\ln(1-\delta) \\ &\quad - \frac{1}{2}\text{Li}_2(\delta) + \frac{1}{9}\rho(\delta) \ln \frac{m_s}{m_u}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

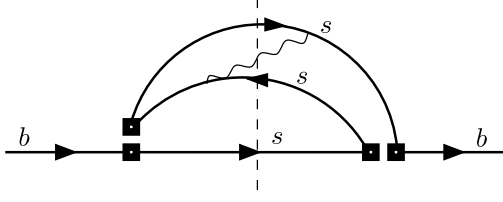
$$\begin{aligned} T_3(\delta) &= \left( -\frac{1}{9}\rho(\delta) - \frac{1}{81}\omega(\delta) \right) \ln \frac{m_b^2 \delta}{m_s^2} + \frac{35}{81}\delta + \frac{1}{36}\delta^2 - \frac{89}{972}\delta^3 + \frac{341}{3888}\delta^4 + \frac{26}{81}\ln(1-\delta) \\ &\quad - \frac{1}{9}\text{Li}_2(\delta), \end{aligned} \quad (2.4)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \rho(\delta) &= \delta + \frac{1}{6}\delta^4 + \ln(1-\delta), \\ \omega(\delta) &= \frac{3}{2}\delta^2 - 2\delta^3 + \delta^4. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Odpowiednie wielomiany  $W_i$  mają postać

$$\begin{aligned} W_1 &= C_3^2 + 20C_3C_5 + \frac{2}{9}C_4^2 + \frac{40}{9}C_4C_6 + 136C_5^2 + \frac{272}{9}C_6^2, \\ W_2 &= \left( \frac{8}{9}C_3 - \frac{4}{27}C_4 + \frac{128}{9}C_5 - \frac{64}{27}C_6 \right) \text{Re } A_1 + \left( \frac{2}{3}C_3 + \frac{8}{9}C_4 + \frac{32}{3}C_5 + \frac{128}{9}C_6 \right) \text{Re } A_2 \end{aligned}$$



Rysunek 2.3: Przykład krzyżowej interferencji własnej operatora  $P_3$  w przypadku, gdy  $q = s$ . Wyrazy z interferencją krzyżową operatorów pingwinowych  $P_{3-6}$  dają wkład do funkcji  $T_3(\delta)$ .

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{9}|A_1|^2 + |A_2|^2, \\
 W_3 = & C_3^2 + \frac{4}{3}C_3C_4 + 32C_3C_5 + \frac{128}{3}C_3C_6 - \frac{2}{9}C_4^2 + \frac{128}{3}C_4C_5 - \frac{64}{9}C_4C_6 + 256C_5^2 \\
 & + \frac{1024}{3}C_5C_6 - \frac{512}{9}C_6^2, \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

gdzie  $A_k = -C_k(V_{us}^*V_{ub})/(V_{ts}^*V_{tb})$ ,  $k = 1, 2$ .

Funkcja  $T_1(\delta)$  pochodzi od interferencji własnej operatorów pingwinowych  $P_{3-6}$ , a funkcja  $T_2(\delta)$  opisuje interferencję własną operatorów typu prąd-prąd  $P_{1,2}^u$  oraz ich interferencję z operatorami  $P_{3-6}$ . W końcu, funkcja  $T_3(\delta)$  opisuje krzyżową interferencję w przejściach  $b \rightarrow ss\bar{s}\gamma$ , tj. wyrazy, w których linie kwarków  $s$  są zamienione w jednym z interferowanych diagramów (patrz rys. 2.3).

Funkcje  $T_i(\delta)$  zależą w sposób jawny od mas kwarków  $u, d, s$  w stanie końcowym, które oznaczamy łącznie przez  $m_q$ . Masy te parametryzują logarytmny kolinearne  $\ln(m_b/m_q)$ , które pojawiają się, gdy foton emitowany jest pod małym kątem w stosunku do emitującego kwarku. Wyrazy tłumione przez potęgę małego stosunku  $m_q/m_b$  zostały zaniedbane.

Obecność logarytmów kolinearnych oznacza, że obliczone wkłady do partonowej szerokości rozpadu  $\Gamma[b \rightarrow X_s^p \gamma]$  mogą służyć jedynie jako zgrubne oszacowania odpowiadających im wkładów do szerokości rozpadu hadronowego  $\Gamma[\bar{B} \rightarrow X_s \gamma]$ . Oszacowania te omówione zostaną w podrozdziale 2.4. Otrzymano je przyjmując równe wartości  $m_u = m_d = m_s \equiv m_q$  i zmieniając stosunek  $m_b/m_q$  w granicach  $[10, 50]$ , co odpowiada masom  $m_q$  rzędu konstytuentnych mas kwarków, tzn. efektywnych mas kwarków walencyjnych w hadronach. Masa najlżejszego naładowanego mezonu, pionu  $\pi^\pm$ , wynosi około 139 MeV, co też wyznacza rząd wielkości dolnego ograniczenia na skalę  $m_q$  regularyzującą rozbieżności kolinearne. Najlżejszym mezonem dziwnym (zawierającym kwark  $s$ ) jest naładowany kaon  $K^\pm$  o masie około 494 MeV. Tak więc przedział  $[10, 50]$  pokrywa się w przybliżeniu z przedziałem  $[m_b/m_{K^\pm}, m_b/m_{\pi^\pm}]$ , gdyż masa kwarku  $b$  wynosi około 4.7 GeV (w schematach kinetycznym lub  $1S$ ).

Główną trudnością w wykonaniu omawianego rachunku było uwzględnienie nie tylko logarytmów mas, które są rozbieżne w granicy  $m_q \rightarrow 0$ , ale także wyrazów skończonych w tej granicy. Wyodrębnienie samych logarytmów mas  $\ln(m_b/m_q)$  i funkcji je mnożących byłoby podręcznikowym rachunkiem [48] sprowadzającym się do obliczenia konwolucji funkcji rozkładu Weizsäckera-Williamsa [49; 50] z amplitudą procesu bez emisji fotonu. Funkcja Weizsäckera-Williamsa została omówiona w podrozdziale 2.3 (patrz równanie (2.11)), natomiast jej wyprowadzenie zostało zamieszczone w Dodatku B. Słuszność uwzględnienia członów skończonych można uzasadnić tym,

że dla rozważanego zakresu stosunku  $m_b/m_q \in [10, 50]$  logarytmy mas nie są bardzo duże, i przyjmują wartości rzędu jedności, konkretnie od  $\ln(10) = 2.3$  do  $\ln(50) = 3.91$ . Jak zobaczymy w dalszej części niniejszego rozdziału (w podrozdziale 2.4), wyrazy skończone i wyrazy zawierające logarytmy kolinearne dają w naszym przypadku podobnej wielkości wkłady do szerokości rozpadu. Uwzględnienie wyrazów skończonych wymagało całkowania po dużych wartościach pędu poprzecznego fotonu względem emitującego go fermionu.

## 2.2 Zarys rachunku

Kody niezbędne do wykonania rachunku zostały napisane przez autora rozprawy w języku Mathematica [51]. Amplitudy przedstawione na rys. 2.2 zostały wygenerowane przy użyciu programu FeynArts [52]. Masy lekkich kwarków zostały zaniedbane wszędzie, gdzie nie prowadziło to do powstawania rozbieżności kolinearnych.

Rozważmy najpierw diagramy z rys. 2.2, w których wierzchołek czterokwarkowy odpowiada operatorowi

$$\tilde{P}_3 = (\bar{s}_L \gamma_\mu b_L)(\bar{q}_1 \gamma^\mu q_2), \quad (2.7)$$

przy czym ładunki elektryczne kwarków  $q_1$  i  $q_2$  traktujemy jako dowolne i nie sumujemy po zapachach, w przeciwieństwie do operatorów  $P_{3-6}$ . Amplituda została znaleziona w cechowaniu Feynmana, co skutkuje obecnością logarytmów kolinearnych w członach interferencyjnych między diagramami z emisją fotonu z różnych linii kwarkowych. Charakterystyka rozbieżności kolinearnych została szerzej przeanalizowana w Dodatku B przy omawianiu funkcji rozszczepienia.

Algebra Diraca została wykonana w  $D = 4 - 2\epsilon$  wymiarach bez zaniedbywania mas kwarków. Od tej chwili obliczenia przeprowadzane były równolegle dwiema metodami. Pierwsza metoda obejmuje całkowanie amplitudy w  $D = 4$  wymiarach po częściowo masywnej przestrzeni fazowej, co prowadzi bezpośrednio do pojawiania się logarytmów kolinearnych postaci  $\ln \frac{m_b^2}{m_q^2}$ . W ramach drugiej metody zaniedbywane są masy lekkich kwarków ( $m_q \rightarrow 0$ ), a całkowanie po przestrzeni fazowej wykonywane jest w  $D = 4 - 2\epsilon$  wymiarach. W granicy  $\epsilon \rightarrow 0$  pojawiają się wtedy rozbieżności kolinearne postaci  $1/\epsilon$ . Całkowanie po bezmasowej przestrzeni fazowej zostało wykonane w pracy magisterskiej M. Kamińskiego [53] przy użyciu metod opisanych w artykule [54]. W ramach sprawdzenia wyników pracy [53] rachunek został powtórnie wykonany przez autora niniejszej rozprawy. Wynik został potwierdzony z dokładnością do sumowania po ładunkach kwarków na ostatnim etapie obliczeń, gdzie w pracy [53] pominięty został czynnik „3”. Uwzględnione zostały także (pominięte w [53]) wkłady od krzyżowej interferencji w procesie  $b \rightarrow ss\bar{s}\gamma$  (rys. 2.3). Wkłady od tego typu interferencji zawiera funkcja  $T_3(\delta)$  podana w równaniu (2.4). Przejście od regularyzacji wymiarowej do regularyzacji przez masy opisane jest w następnym podrozdziale.

Całkowanie w  $D = 4$  wymiarach po czterocząstkowej masywnej przestrzeni fazowej zostało opisane w Dodatku A. Kluczowym elementem rachunku było wyodrębnienie na stosunkowo wczesnym jego etapie wyrazów odpowiedzialnych za wszystkie duże logarytmy mas oraz człony skończone, tzn. niezależące od stosunku  $m_q/m_b$ . Wyrazy tłumione przez potęgi małego stosunku  $m_q/m_b$  zostały zaniedbane. Po wykonaniu całkowania po przestrzeni fazowej z uwzględnieniem



cięcia na energię fotonu, wszystkie wyrazy interferencyjne zostały zsumowane. Ładunki elektryczne  $\{Q_1, Q_2, Q_s, Q_b\}$  zostały początkowo potraktowane jako dowolne, przy czym  $Q_1$  i  $Q_2$  oznaczają odpowiednio ładunki kwarków  $q_1$  i  $q_2$  w operatorze  $\tilde{P}_3$  (2.7). Następnie została narzucona zasada zachowania ładunku  $Q_b = Q_1 - Q_2 + Q_s$  wszędzie oprócz członów proporcjonalnych do  $Q_b^2$ . Te ostatnie człony opisują emisję fotonu z linii kwarku  $b$ , a zatem rozbieżności kolinearne są w nich nieobecne, i dla każdego  $\delta \neq 0$  człony te są skończone.

Podstawienie w otrzymanym w powyższy sposób wyniku konkretnych wartości ładunków elektrycznych oraz wysumowanie po zapachach zgodnie ze strukturą operatora  $P_3$  (1.8) prowadzi bezpośrednio do funkcji  $T_1(\delta)$  i  $T_3(\delta)$  mnożących  $C_3^2$  w równaniu (2.1). Wkłady od operatorów innych niż  $P_3$  otrzymano rozważając najpierw

$$\tilde{P}_5 = (\bar{s}_L \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} b_L) (\bar{q}_1 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} q_2), \quad (2.8)$$

i przeprowadzając obliczenie różniące się od poprzedniego jedynie na etapie algebry Diraca. Dotyczy to zarówno wkładów od samego  $\tilde{P}_5$ , jak i interferencji między  $\tilde{P}_3$  a  $\tilde{P}_5$ . Uwzględnienie prostych czynników kolorowych, ładunków elektrycznych oraz wysumowanie po zapachach zgodnie ze strukturą operatorów  $P_{3-6}$  (1.8) doprowadziło do otrzymania konkretnej postaci wszystkich wyrazów mnożących funkcje  $T_1(\delta)$  i  $T_3(\delta)$  w równaniu (2.1).

Pozostałe wkłady do rozważanego procesu zawierają interferencję operatorów  $P_1^u$  i  $P_2^u$  zarówno ze sobą, jak i z operatorami pingwinowymi  $P_{3-6}$ . Zastosowanie standardowych tożsamości dla macierzy Diraca i Gell-Manna, a następnie wykonanie przekształcenia Fierza dla pól fermionowych pozwala na wyrażenie operatorów  $P_1^u$  i  $P_2^u$  jako kombinacji liniowych części  $(\bar{s}b)(\bar{u}u)$  operatorów pingwinowych

$$\begin{aligned} P_1^u &= -\frac{4}{27}P_3^u + \frac{1}{9}P_4^u + \frac{1}{27}P_5^u - \frac{1}{36}P_6^u, \\ P_2^u &= -\frac{1}{9}P_3^u - \frac{2}{3}P_4^u + \frac{1}{36}P_5^u + \frac{1}{6}P_6^u. \end{aligned} \quad (2.9)$$

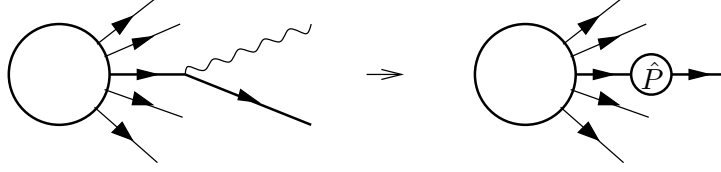
Powyższe tożsamości obowiązują dla obliczeń w  $D = 4$  wymiarach. Korzystając z tożsamości (2.9) otrzymano wyrazy proporcjonalne do  $T_2(\delta)$  w wyniku (2.1).

### 2.3 Rozbieżności kolinearne: od regularyzacji wymiarowej do regularyzacji przez masy

Przejdźcie od regularyzacji wymiarowej do regularyzacji przez masy lekkich kwarków zostało wykonane przy użyciu funkcji rozszczepienia znalezionych w obu regularyzacjach. Funkcje rozszczepienia opisują prawdopodobieństwo emisji fotonu lub gluonu pod infitezymalnie małym kątem w stosunku do emitującego fermionu.

Niech  $\mathcal{M}(q, k; \dots)$  oznacza niezmienniczy element macierzowy dla procesu z emisją fotonu, przy czym pęd fermionu po emisji oznaczony jest przez  $q$ , a pęd fotonu przez  $k$ . Dla kolinearnej emisji, po wysumowaniu i uśrednieniu po spinach, zachodzi następująca faktoryzacja (patrz rys. 2.4)

$$|\overline{\mathcal{M}}(q, k; \dots)|^2 \simeq Q_q^2 \frac{1}{(2qk)} \hat{P}(x) |\overline{\mathcal{M}}(p; \dots)|^2, \quad (2.10)$$



Rysunek 2.4: Ilustracja faktoryzacji w równaniu 2.10. Dominujący wkład do procesu z emisją fotonu można wyrazić przez konwolucję funkcji rozszczepienia  $\hat{P}$  z amplitudą bez emisji.

W powyższym wzorze  $\mathcal{M}(p; \dots)$  jest amplitudą procesu bez emisji fotonu, z fermionem o pędzie  $p$  będącym na powłoce masy ( $p^2 = m^2$ ). W przypadku emisji kolinearnej, dla ustalonego  $x \in (0, 1)$ , zachodzi  $p \rightarrow q/(1-x)$ . Ładunek  $Q_q$  jest ładunkiem emitującego fermionu. Dominujący wkład do funkcji  $\hat{P}(x)$  ma postać

$$\hat{P}^{\text{domin}}(x) = N \frac{1 + (1-x)^2}{x}. \quad (2.11)$$

Funkcja ta w elektrodynamice równoważna jest rozkładowi Weizsäckera-Williamsa [49; 50], natomiast w chromodynamice kwantowej (dla emisji gluonu) jest ona proporcjonalna do funkcji rozszczepienia Altarelliego Parisiego [55]. Stała normalizacyjna wynosi  $N = 8\pi\alpha_e$  dla QED oraz  $N = 8\pi\alpha_s C_F$  w przypadku QCD. Postać funkcji  $\hat{P}(x)$  nie zależy od innych szczegółów dynamiki rozważanego procesu, m.in. od pędów cząstek niebiorących udziału w emisji fotonu (gluonu).

Przejście między regularyzacjami wymaga znajomości funkcji rozszczepienia  $\hat{P}(x)$  wraz z członami skończonymi, tj. nieprowadzącymi do rozbieżności kolinearnych. Równanie (2.11) nie zawiera tych wyrazów. Wyprowadzenie równania (2.10) oraz funkcji rozszczepienia w obu regularyzacjach wraz z wyrazami skończonymi zamieszczono w Dodatku B.

Różnica funkcji rozszczepienia w obu regularyzacjach odcałkowanych po przestrzeni fazowej fotonu ograniczonej do kolinearnego stożka sparametryzowanego przez pęd poprzeczny fotonu  $k_\perp$  wyraża się przez (por. Dodatek B)

$$\Delta f(x; \epsilon, \frac{m}{\mu}) = f_m(x) - f_\epsilon(x) = \frac{\alpha_e}{2\pi} \frac{1 + (1-x)^2}{x} \left[ \frac{1}{\epsilon} - 1 - 2 \ln \frac{xm}{\mu} \right]. \quad (2.12)$$

Funkcje  $f_m(x)$  i  $f_\epsilon(x)$  zostały spójnie wyprowadzone w obu regularyzacjach i zależą w ten sam sposób od górnej granicy całkowania po  $k_\perp^2$  oznaczanej przez  $E^2$ . W rezultacie zależność od  $E$  kasuje się po obliczeniu w równaniu (2.12) różnicy rozważanych funkcji.

Po narzuceniu zasady zachowania ładunku wyrazy rozbieżne kolinearnie są proporcjonalne do kwadratów ładunków  $Q_i^2$ . W celu przejścia między regularyzacjami należy do wyrażenia na szerokość rozpadu znalezionej w regularyzacji wymiarowej dodać konwolucję funkcji  $\Delta f$  z równania (2.12) z amplitudą tego samego rozpadu, ale bez emisji fotonu

$$\Gamma(\delta; \frac{m_b}{m_q}) = \Gamma(\delta; \epsilon) + \sum_j Q_j^2 \int \Delta f(x; \epsilon, \frac{m_q}{\mu}) |\overline{\mathcal{M}}(p; \dots)|^2 dx d\tilde{\Phi}_3 \Theta(E_\gamma - E_0), \quad (2.13)$$

gdzie sumuje się po wszystkich fermionach emitujących foton. Trzycząstkowa przestrzeń fazowa  $d\tilde{\Phi}_3$  wycałkowana po zmiennych kątowych nieobecnych w funkcji podcałkowej dana jest

przez [56]

$$d\tilde{\Phi}_3 \equiv \tilde{\mu}^{4\epsilon} \int_{\Omega} d\Phi_3 = \tilde{\mu}^{4\epsilon} \frac{2^{-8+6\epsilon} \pi^{-\frac{5}{2}+2\epsilon} (m_b^2)^{1-2\epsilon}}{\Gamma(\frac{3}{2}-\epsilon) \Gamma(1-\epsilon)} \times (s_{12}s_{1s}s_{2s})^{-\epsilon} \delta(1-s_{12}-s_{1s}-s_{2s}) ds_{12} ds_{1s} ds_{2s}, \quad (2.14)$$

gdzie  $s_{ij} = \frac{2p_i p_j}{m_b^2}$ ,  $i, j \in \{q_1, q_2, s\} \equiv \{1, 2, s\}$ .

Równanie (2.13) nie zależy od wyboru cechowania. Funkcje rozszczepienia nie są jednak niezmiennicze względem cechowania. Funkcje takie wyprowadzone w tej samej regularyzacji mogą różnić się między sobą członami skończonymi, które zależą od wyboru cechowania oraz górnej granicy całkowania po kwadracie pędu transwersalnego  $\mathbf{k}_{\perp}^2$ . Tylko różnica (2.12) dwóch funkcji rozszczepienia (B.25) i (B.26) nie zależy od wyboru cechowania oraz konwencji całkowania po  $\mathbf{k}_{\perp}^2$ .

Po narzuceniu zasady zachowania ładunku wyrazy proporcjonalne do  $Q_i Q_j$  przy  $i \neq j$  nie zawierają rozbieżności kolinearnych. Są one zatem identyczne w obu regularyzacjach.

Przejdźcie od regularyzacji wymiarowej do regularyzacji przez masy opisaną powyżej metodą jest bezproblemowe w przypadku funkcji  $T_1(\delta)$  i  $T_3(\delta)$ . W przypadku funkcji  $T_2(\delta)$  pojawiają się subtelności związane z koniecznością poprawnego uogólnienia macierzy  $\gamma_5$  do  $D$  wymiarów. W niniejszej pracy funkcja  $T_2(\delta)$  została wyprowadzona przy użyciu tożsamości (2.9) obowiązujących jedynie w  $D = 4$  wymiarach już po dokonaniu przejścia od regularyzacji wymiarowej do regularyzacji przez masy.

Obliczenie wykonane przy użyciu regularyzacji wymiarowej oraz funkcji rozszczepienia dało ostatecznie dokładnie ten sam wynik (2.1) na poprawkę do szerokości rozpadu co opisane w poprzednim podrozdziale (i Dodatku A) całkowanie po częściowo masywnej przestrzeni fazowej w  $D = 4$  wymiarach.

## 2.4 Opis wyników numerycznych

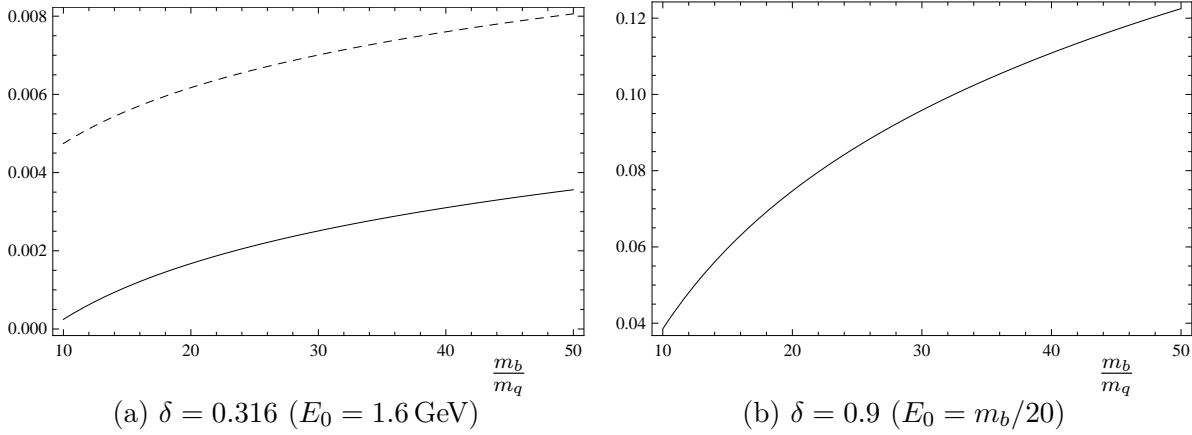
Znając wartości współczynników Wilsona podane w tabeli 1.1 oraz wzór analityczny opisujący rozważaną poprawkę  $\Delta\Gamma_{4\text{-quark}}^{\text{LO}}$  do szerokości rozpadu (2.1) możemy teraz przeanalizować numeryczną zależność tej poprawki od stosunku mas<sup>1</sup>  $m_b/m_q$  oraz od cięcia na energię fotonu  $E_0$  (lub, co równoważne, od parametru  $\delta = 1 - 2E_0/m_b$ ).

Wygodnie jest w tym celu znormalizować  $\Delta\Gamma_{4\text{-quark}}^{\text{LO}}$  do wkładu wiodącego, który dany jest przez

$$\Gamma_0 = \frac{G_F^2 \alpha_{\text{em}} m_b^5}{32\pi^4} |V_{ts}^* V_{tb}|^2 C_7^2. \quad (2.15)$$

Wkłady od operatorów  $P_{1,2}^u$  proporcjonalne do funkcji  $T_2(\delta)$  zależne są od stosunku elementów macierzy CKM, który równy jest  $(V_{us}^* V_{ub})/(V_{ts}^* V_{tb}) \simeq -0.0079 + 0.018i$  [57]. Dokładna wartość tego stosunku nie jest istotna, gdyż wkłady proporcjonalne do  $T_1(\delta)$  okazują się 50 (5) razy większe od wkładów proporcjonalnych do  $T_2(\delta)$  ( $T_3(\delta)$ ).

<sup>1</sup>Jak wspomniano wyżej, przyjmujemy dla uproszczenia tę samą masę  $m_q$  dla wszystkich lekkich kwarków  $u, d, s$ .



Rysunek 2.5: (a) Zależność  $\Delta\Gamma_{4\text{-quark}}^{\text{LO}}/\Gamma_0$  (linia ciągła) od  $m_b/m_q$  dla  $E_0 = 1.6 \text{ GeV}$ . Linią przerywaną oznaczono obliczoną poprawkę po uwzględnieniu jedynie wyrazów proporcjonalnych do logarytmu mas  $\ln(m_b/m_q)$ . (b) Zależność  $\Delta\Gamma_{4\text{-quark}}^{\text{LO}}/\Gamma_0$  od  $m_b/m_q$  dla  $\delta = 0.9$ .

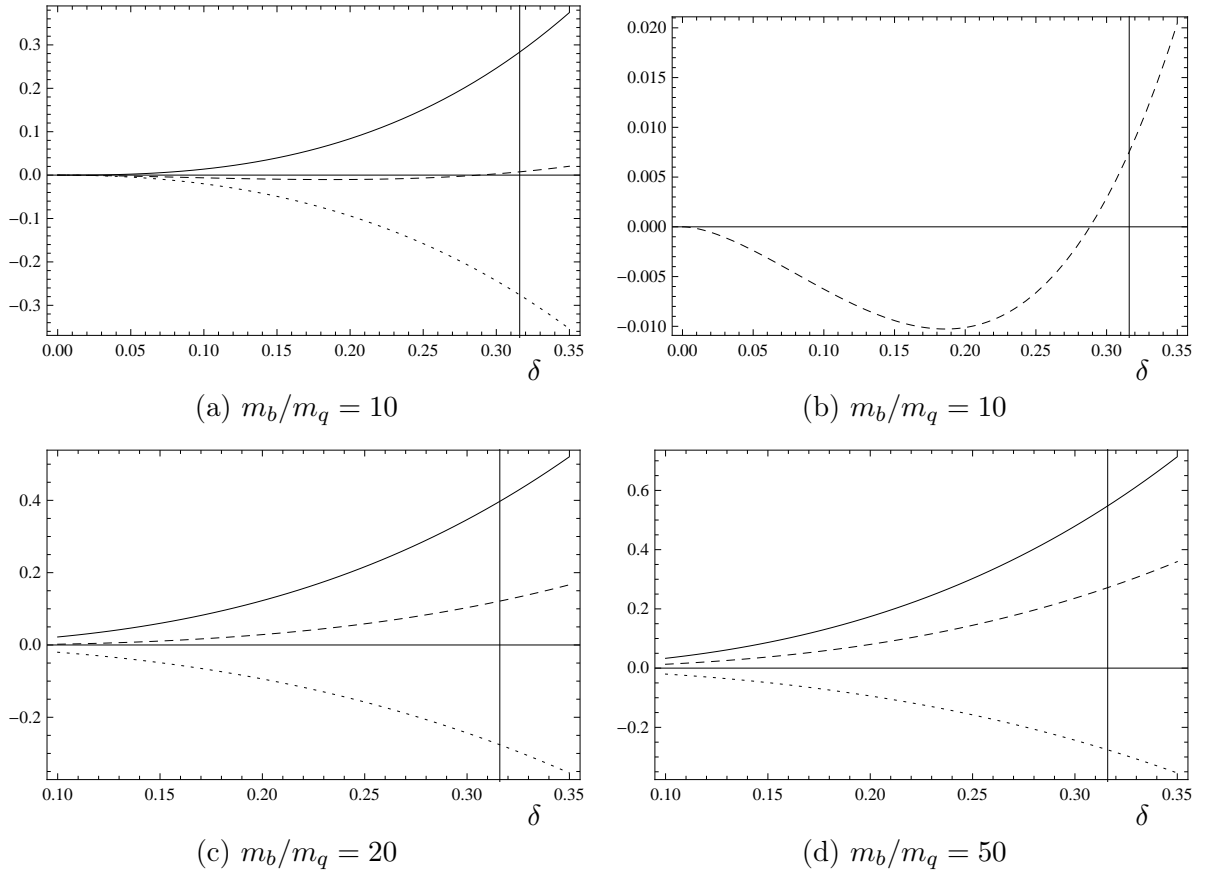
$E_0$	$\delta$	$\Delta\Gamma_{4\text{-quark}}^{\text{LO}}/\Gamma_0$		
			$\frac{m_b}{m_q} = 50$	$\frac{m_b}{m_q} = 10$
1.6 GeV	0.316	$-0.45\% + 0.21\% \ln \frac{m_b}{m_q}$	+0.36%	+0.02%
$\frac{m_b}{20}$	0.9	$-8.1\% + 5.2\% \ln \frac{m_b}{m_q}$	+12.2%	+3.8%

Tablica 2.1: Obliczony stosunek  $\Delta\Gamma_{4\text{-quark}}^{\text{LO}}/\Gamma_0$  dla wybranych wartości parametrów  $m_b/m_q$  oraz  $E_0$ .

Tabela 2.1 przedstawia otrzymane wyniki dla stosunku  $\Delta\Gamma_{4\text{-quark}}^{\text{LO}}/\Gamma_0$  przy kilku wybranych wartościach parametrów  $m_b/m_q$  oraz  $E_0$ . Widać, że dla cięcia na energię fotonu w punkcie  $E_0 = 1.6 \text{ GeV}$  oraz przy  $10 < m_b/m_q < 50$ , wartość numeryczna obliczonych poprawek nie przekracza 0.4% wartości centralnej stosunku rozgałęzienia rozpadu  $b \rightarrow X_s^P \gamma$ . Ten sam fakt zilustrowany jest na rysunku 2.5 (a). Na rysunku tym zamieszczono także wykres obliczonej poprawki po uwzględnieniu jedynie wyrazów proporcjonalnych do kolinearnego logarytmu mas  $\ln(m_b/m_q)$ . Widać, że wkłady skończone istotnie redukują wielkość obliczonej poprawki.

Mała wartość rozważanej poprawki dla  $E_0 = 1.6 \text{ GeV} \sim m_b/3$ , wynika z faktu, że przy takim cięciu na energię fotonu dostępny jest jedynie mały fragment czterociałowej przestrzeni fazowej dla rozpadu  $b \rightarrow sq\bar{q}\gamma$ . Gdy wartość cięcia  $E_0$  zbliża się do swojej wartości maksymalnej  $m_b/2$ , parametr  $\delta$  dąży do zera, a wtedy wszystkie funkcje  $T_i(\delta)$  w równaniach (2.2)–(2.4) zachowują się jak  $\mathcal{O}(\delta^2 \ln \delta)$ .

Otrzymane wnioski zgodne są z uprzednimi oszacowaniami [10] wykonanymi metodą analizy rzędów wielkości. Konkretnie wyniki otrzymane w niniejszej pracy, choć ciągle zgrubne ze względu na obecność logarytmów kolinearnych, dają jednak znacznie lepszą podstawę do oceny związanej z rozważaną poprawką niepewności teoretycznej w przewidywaniu na szerokość rozpadu  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  przy  $E_0 = 1.6 \text{ GeV}$ . W chwili obecnej niepewność ta okazuje się zaniedbywalna w porównaniu z innymi niepewnościami podsumowanymi w końcowej części podrozdziału 1.2. Jest jednak prawdopodobne, że sytuacja ta może zmienić się w przyszłości, na co szczególnie wpływ będzie miał ewentualny postęp w analizie wkładów o charakterze nieperturbacyjnym [9].

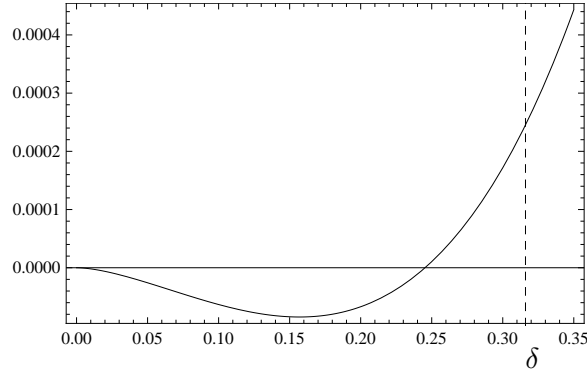


Rysunek 2.6: Wykresy zdefiniowanych w równaniu (2.16) funkcji  $T_1^a(\delta)$  (linia ciągła),  $T_1^b(\delta)$  (linia kropkowana) oraz ich sumy  $T_1(\delta)$  (linia przerywana) w zależności od wartości cięcia na energię fotonu. Na wykresach (a), (c) i (d) przyjęto odpowiednio  $m_b/m_q = 10, 20$  i  $50$ . Wykres (b) przedstawia funkcję  $T_1(\delta)$  z przypadku (a) przy zmienionej skali na osi rzędnych. Na wszystkich rysunkach pionowa linia odpowiada wartości centralnej  $\delta = 0.316$  ( $E_0 = 1.6$  GeV).

Tabela 2.1 oraz rysunek 2.5 (b) pokazują wielkość rozważanej poprawki dla małych wartości cięcia na energię fotonu  $E_0 = \frac{m_b}{20}$ . Taka wartość cięcia sugerowana była jako standardowa w pracy [45]. W tym przypadku wartość obliczonych poprawek sięga nawet 12% wartości centralnej stosunku rozgałęzienia, a związana z nimi niepewność jest podobnego rzędu. Rozważanie takiej wartości cięcia jest jednak czysto akademickie, gdyż nie jest ono osiągalne eksperymentalnie ze względu na radiacyjne tło od rozpadów generowanych przez przejścia  $b \rightarrow c$ . Poza tym obliczenia teoretyczne przy takiej wartości cięcia obarczone byłyby dodatkowymi niepewnościami.

Na zakończenie tego rozdziału omówimy nieco dokładniej kwestię dokonanego zaniedbania wyrazów tłumionych przez potęgi małego stosunku  $m_q/m_b$ . Przybliżenie to znacznie ułatwia obliczenia, lecz nie jest słuszne dla dowolnych wartości parametrów, co przejawia się w przyjmowaniu przez funkcje  $T_{1,2}(\delta)$  niefizycznych ujemnych wartości w przypadkach, gdy logarytm  $\ln(m_b^2\delta/m_q^2)$  nie jest wystarczająco duży. Zilustrujemy to wydzielając z funkcji  $T_1(\delta)$  (2.2) wkład proporcjonalny do tego logarytmu:

$$T_1(\delta) = T_1^a(\delta) + T_1^b(\delta),$$



Rysunek 2.7: Zależność  $\Delta\Gamma_{4\text{-quark}}^{\text{LO}}/\Gamma_0$  od  $\delta$  dla  $m_b/m_q = 10$  i dla  $\delta < 0.35$ . Pionowa przerywana linia oznacza wartość centralną cięcia na energię fotonu  $E_0 = 1.6$  GeV.

$$\begin{aligned}
 T_1^a(\delta) &= \left( -\frac{5}{3}\rho(\delta) - \frac{2}{9}\omega(\delta) \right) \ln \frac{m_b^2\delta}{m_q^2}, \\
 T_1^b(\delta) &= \frac{109}{18}\delta + \frac{17}{18}\delta^2 - \frac{191}{108}\delta^3 + \frac{23}{16}\delta^4 + \frac{79}{18}\ln(1-\delta) - \frac{5}{3}\text{Li}_2(\delta). \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że funkcje  $T_1^a(\delta)$  i  $T_1^b(\delta)$  są odpowiednio dodatnio i ujemnie określone dla wszystkich  $\delta \in ]0, 1[$  takich, że  $\ln(m_b^2\delta/m_q^2) > 0$ . Z drugiej strony, funkcja  $T_1(\delta)$  reprezentuje wiodący wkład od operatorów czterokwarkowych do szerokości rozpadu  $b \rightarrow sq\bar{q}\gamma$ , który musiałby być dodatni niezależnie od wartości współczynników Wilsona  $C_i$ , gdybyśmy nie zaniedbali członów proporcjonalnych do potęg  $m_q/m_b$ .

Wykresy na rysunku 2.6 przedstawiają funkcje  $T_1^a(\delta)$ ,  $T_1^b(\delta)$  oraz ich sumę  $T_1(\delta)$  dla kilku wartości  $m_b/m_q$  oraz dla  $\delta < 0.35$ . Na wykresach 2.6 (a) i 2.6 (b) widać, że funkcja  $T_1(\delta)$  przyjmuje wartości ujemne dla  $\delta \lesssim 0.29$ . Położenie i wartość minimum funkcji  $T_1(\delta)$  skalują się wraz ze zmianą wartości  $m_q/m_b$  odpowiednio jak  $m_q^2/m_b^2$  i  $m_q^4/m_b^4$ , co jest spójne z faktem, że obecność tego minimum wynika jedynie z zaniedbania wyrazów tłumionych przez potęgi stosunku  $m_q/m_b$ . Na wykresach 2.6 (c) i 2.6 (d) możemy też zobaczyć, że w miarę zwiększania wartości stosunku  $m_b/m_q$ , wyrazy skończone dają coraz mniejszy, jednak wciąż istotny wkład do funkcji  $T_1(\delta)$ .

W przypadku funkcji  $T_2(\delta)$  i  $T_3(\delta)$ , ich rozdzielenie na składniki podobnie jak w równaniu (2.16) prowadzi do identycznych wniosków co do dodatniej i ujemnej określoności tych składników. Należy przy tym pamiętać, że argument dotyczący dodatniej określoności szerokości rozpadu nie stosuje się do samej funkcji  $T_3$ , a jedynie do jej kombinacji liniowych z funkcją  $T_1$ , które można odczytać ze struktury wielomianów  $W_i$  w równaniu 2.6.

Rysunek 2.7 pokazuje dla jakich wartości  $\delta$  w przypadku  $m_b/m_q = 10$  załamuje się przybliżenie polegające na zaniedbaniu wyrazów tłumionych przez potęgi małego stosunku  $m_q/m_b$ . Obliczona poprawka  $\Delta\Gamma_{4\text{-quark}}^{\text{LO}}/\Gamma_0$  ma ujemną wartość dla  $\delta \lesssim 0.25$ . Dla centralnej wartości cięcia na energię fotonu, oznaczonej na rysunku 2.7 pionową przerywaną linią, wielkość  $\Delta\Gamma_{4\text{-quark}}^{\text{LO}}/\Gamma_0$  jest dodatnia. Należy przy tym zauważyć mikroskopijną wartość całej poprawki ( $\sim 0.03\%$ ). W rozważanym przypadku ( $m_b/m_q = 10$ ) wyrazy tłumione przez potęgi  $m_q/m_b$  powinny przywrócić poprawce prawidłowy dodatni znak dla wszystkich wartości  $\delta$ , ale zwiększenie jej modułu do niezaniebdywalnej wartości nie wydaje się możliwe.

## Rozdział 3

# Poprawki rzędu $\alpha_s^2$ w przybliżeniu BLM

### 3.1 Definicja przybliżenia BLM

Niniejszy rozdział poświęcony jest obliczeniu wkładów od trzy- i czterociałowych stanów końcowych do zdefiniowanych w podrozdziale 1.2 wielkości  $K_{ij}^{(2)}$  dla  $(ij) \in \{(11), (12), (22), (17), (27), (18), (28), (88)\}$ . Rozważane wkłady rzędu  $\alpha_s^2$  wyznaczone zostały w przybliżeniu Brodsky’ego, Lepage’a i Mackenzie (BLM) [39]. Aby zdefiniować to przybliżenie przypomnijmy najpierw równanie grupy renormalizacji dla stałej sprzężenia oddziaływań silnych

$$\mu \frac{d}{d\mu} \alpha_s(\mu) = -\frac{\beta_0}{2\pi} \alpha_s^2(\mu) + \mathcal{O}(\alpha_s^3), \quad (3.1)$$

gdzie  $\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f$ , a  $n_f$  oznacza ilość aktywnych zapachów kwarków. Ilość aktywnych zapachów wynosi  $n_f = 5$  w naszym przypadku, tzn. w przypadku określonej w podrozdziale 1.2 teorii efektywnej wykorzystywanej do opisu radiacyjnych rozpadów mezonu  $\bar{B}$ . W teorii tej aktywnymi zapachami są  $u, d, s, c, b$ , przy czym pierwsze trzy z nich traktujemy w tym rozdziale jako bezmasowe.<sup>1</sup> Oznaczając ilość bezmasowych zapachów przez  $n_l$  i traktując ją chwilowo jako dowolną możemy napisać

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}(n_l + 2). \quad (3.2)$$

Każda z rozważanych wielkości  $K_{ij}^{(2)}$  zależy liniowo od  $n_l$

$$K_{ij}^{(2)} = A_{ij}(n_l + 2) + B_{ij}, \quad (3.3)$$

przy czym wyraz  $B_{ij}$  jest na ogół znacznie trudniejszy do obliczenia niż  $A_{ij}$ .

Dokonajmy teraz rozdzielenia wielkości  $K_{ij}^{(2)}$  na człon proporcjonalny do współczynnika  $\beta_0$  i oznaczany przez  $K_{ij}^{(2)\beta_0}$ , oraz na resztę oznaczaną przez  $K_{ij}^{(2)\text{rem}}$ :

$$K_{ij}^{(2)} = K_{ij}^{(2)\beta_0} + K_{ij}^{(2)\text{rem}}. \quad (3.4)$$

---

<sup>1</sup>Wyjątkowo dla  $K_{88}^{(2)\beta_0}$  nie zaniedbamy masy kwarku  $s$  w logarytmach kolinearnych.

Porównanie związków (3.2), (3.3) i (3.4) pozwala natychmiast stwierdzić, że

$$K_{ij}^{(2)\beta_0} = -\frac{3}{2}\beta_0 A_{ij} = -\frac{3}{2} \left( 11 - \frac{2}{3}(n_l + 2) \right) A_{ij}, \quad (3.5)$$

$$K_{ij}^{(2)\text{rem}} = \frac{33}{2} A_{ij} + B_{ij}. \quad (3.6)$$

W przybliżeniu BLM zakłada się, że dominujący wkład do poprawek rzędu NNLO dają wydzielone wyżej człony proporcjonalne do współczynnika  $\beta_0$ . Dlatego też poprawki te znajduje się w pierwszej kolejności, szczególnie jeśli znalezienie pełnego wyrażenia na daną poprawkę NNLO jest trudne technicznie.

Uzasadnienie zastosowania przybliżenia BLM podane w pracy [39] opiera się na założeniu, że dominujące poprawki perturbacyjne rzędu drugiego i wyższych powiązane są z renormalizacją parametrów teorii. Jeśli jedynym istotnym parametrem ulegającym renormalizacji QCD jest stała sprzężenia  $\alpha_s$ , to dominująca poprawka w rzędzie NNLO rzeczywiście proporcjonalna jest do parametru  $\beta_0$ , a zatem może być ona odczytana z diagramów proporcjonalnych do  $n_l$ . Argumentacja ta nie znajduje bezpośredniego zastosowania w przypadku radiacyjnych rozpadów mezonu  $B$ , gdyż obliczenia wykonywane są w ramach teorii efektywnej, w której renormalizacji podlega nie tylko stała sprzężenia  $\alpha_s$ , ale także współczynniki Wilsona oraz masy kwarków. Mimo to, poprawki BLM zazwyczaj są obliczane w pierwszej kolejności, gdyż praktyka wskazuje, że rzeczywiście dają one dominujące wkłady rzędu NNLO.

Przyjeliśmy  $n_l = 3$ , ponieważ masy lekkich kwarków  $q = u, d, s$  są zanedbywane zarówno w pętlach na liniach gluonowych w procesach  $b \rightarrow s\gamma$  oraz  $b \rightarrow sg\gamma$ , jak i dla wychodzących par  $q\bar{q}$  w procesach  $b \rightarrow sg^*\gamma \rightarrow sq\bar{q}\gamma$ . Po dodaniu do siebie obu typów wkładów kasują się rozbieżności podczerwone związane z zaniedbaniem mas lekkich kwarków  $q$  i  $\bar{q}$ . Masy kwarków  $b$  i  $c$  nie są zanedbywane. Wszystkie wielkości w równaniu (1.14) są zrenormalizowane w schemacie  $\overline{\text{MS}}$  przy skali  $\mu_b$  w teorii z pięcioma aktywnymi zapachami kwarków, co uzasadnia użycie przy wyprowadzaniu poprawek  $K_{ij}^{(2)\beta_0}$  współczynnika  $\beta_0$  dla pięciu zapachów kwarkowych. Efekty niezerowych wartości mas kwarków  $m_c$  i  $m_b$  w pętlach na liniach gluonowych dla wszystkich  $K_{ij}^{(2)}$ , gdzie  $i, j \in \{1, 2, 7, 8\}$ , zostały znalezione w artykułach [35; 58]. Produkcja będących na powłoce masy par  $b\bar{b}$  w procesie  $b \rightarrow X_s^p\gamma$  nie jest dozwolona kinematycznie. Jeśli chodzi o pary  $c\bar{c}$ , to z definicji nie są one zawarte w stanie  $X_s^p$ . W hadronowym rozpadzie  $\bar{B} \rightarrow X_s\gamma$  odpowiada to przyjęciu, że stan  $X_s$  nie zawiera hadronów z niesparowanymi kwarkami  $c$  lub  $\bar{c}$ . Obecność takich hadronów w stanie końcowym jest zresztą kinematycznie niemożliwa dla  $E_\gamma > (m_B^2 - 4m_D^2)/(2m_B) \simeq 1.3 \text{ GeV}$ , czyli w całym interesującym nas zakresie energii fotonów.

Poprawki od dwuciałowego kanału rozpadu  $b \rightarrow s\gamma$  dają wkład do  $K_{ij}^{(2)\beta_0}$  jedynie dla  $(ij) = (17), (27), (77)$  oraz (78). Zostały one obliczone w pracy [42]. Poprawki od trzy- i czterociałowych stanów końcowych (kanały  $b \rightarrow sg\gamma$  oraz  $b \rightarrow sg^*\gamma \rightarrow sq\bar{q}\gamma$ ) dla  $i, j \in \{1, 2, 7\}$  oraz dla  $K_{78}^{(2)\beta_0}$  zostały po raz pierwszy obliczone w artykule [40]. Większość z nich, tj.  $K_{ij}^{(2)\beta_0}$  dla  $(ij) \in \{(11), (12), (22), (17), (27)\}$ , została powtórnie obliczona i potwierdzona przez autora niniejszej pracy.

Oryginalne wykonane przez autora obliczenia poprawek  $K_{ij}^{(2)\beta_0}$  dotyczą przypadków  $(ij) \in \{(18), (28), (88)\}$ . Wyniki zostały opublikowane w artykule [6]. W przypadku (88) zgodne są one z



$(ij)$	krotność stanu końcowego	obliczone przez	potwierdzone przez
(77)	2	[42]	[32]
(77)	3, 4	[40]	[42; 32]
(78)	2	[42]	[36]
(78)	3, 4	[40]	[36; 41]
(88)	3, 4	[6; 41]	
(17),(27)	2	[42]	[58]
(17), (27)	3, 4	[40]	[6]
(11), (12), (22)	3, 4	[40]	[6]
(18), (28)	3, 4	[6]	

Tablica 3.1: Stan obliczeń poprawek  $K_{ij}^{(2)\beta_0}$ .

opublikowanymi równocześnie rezultatami niezależnego obliczenia A. Ferroglia i U. Haischa [41]. Tabela 3.1 podsumowuje obecny stan obliczeń poprawek  $K_{ij}^{(2)\beta_0}$ .

Dla poprawek  $K_{ij}^{(2)\beta_0}$ , gdzie  $i, j \neq 7$  będziemy używać następującej notacji

$$K_{ij}^{(2)\beta_0} = 2(1 + \delta_{ij})\beta_0 \left[ \phi_{ij}^{(1)}(\delta)L_b + h_{ij}^{(2)}(\delta) \right], \quad (3.7)$$

gdzie  $\delta = 1 - 2E_0/m_b$  oraz  $L_b = \ln(\mu_b^2/m_b^2)$ . Odpowiadające im wkłady do szerokości rozpadu wynoszą

$$\Gamma_{ij}^{(2)\beta_0} = \frac{G_F^2 \alpha_{em}}{32\pi^4} m_b^5 |V_{ts}^* V_{tb}|^2 C_i C_j \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 K_{ij}^{(2)\beta_0}. \quad (3.8)$$

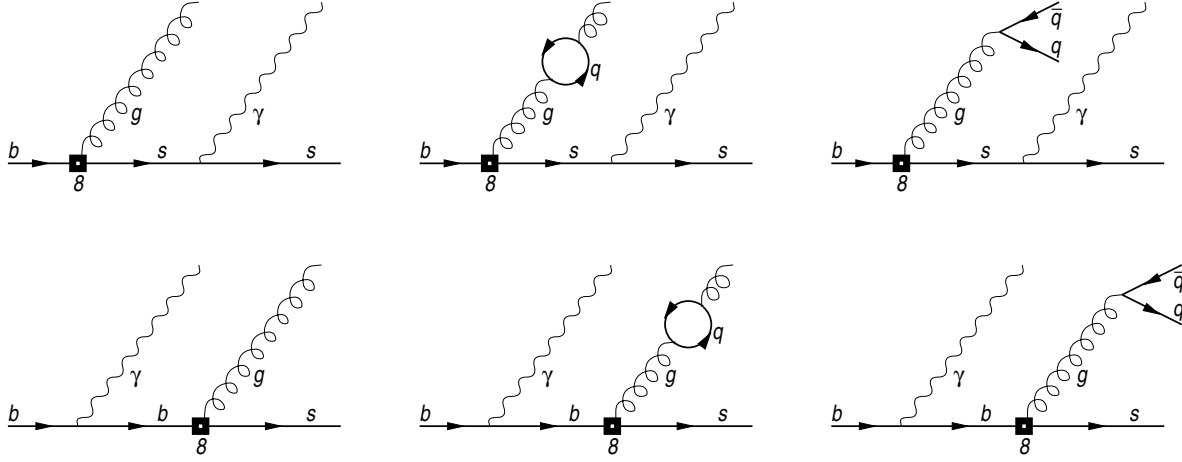
Funkcje  $\phi_{ij}^{(1)}(\delta)$  są dobrze znane z rachunku w rzędzie NLO. Ich jawną postać można znaleźć na przykład w Dodatku E artykułu [10], a także w dalszej części niniejszego rozdziału (patrz równania (3.51) i (3.52)). Tak więc obliczenie  $K_{ij}^{(2)\beta_0}$  sprowadza się do znalezienia funkcji  $h_{ij}^{(2)}(\delta)$ .

Rachunek wszystkich omawianych poprawek w przybliżeniu BLM opiera się na metodzie Voloshina-Smitha [8]. Zauważyli oni, że obliczenie poprawki w rzędzie  $\alpha_s^2$  w przybliżeniu BLM można zredukować do znalezienia szerokości rozpadu w rzędzie  $\alpha_s$  z gluonem poza powłoką masy. Ceną za taką redukcję jest konieczność wykonania całki po kwadracie pędu gluonu  $q^2$ :

$$\Gamma^{(2)\beta_0} = -\frac{\alpha_s}{4\pi}\beta_0 \left[ \int_0^\delta \frac{\Gamma^{(1)}(v) - \Gamma^{(1)}(0)}{v} dv + \Gamma^{(1)}(0) \left( \ln \delta - \frac{5}{3} - L_b \right) \right], \quad (3.9)$$

gdzie  $v = q^2/m_b^2$ ,  $L_b = \ln(\mu_b^2/m_b^2)$ . Wyprowadzenie równania (3.9) przedstawione jest w Dodatku C.

Obliczenie  $K_{88}^{(2)\beta_0}$  (podrozdział 3.2) zostanie omówione w pierwszej kolejności. Jest to rachunek prostszy od pozostałych, a końcowa postać poprawki może zostać wyrażona w postaci analitycznej. W podrozdziale 3.3 zostanie opisany rachunek poprawek  $K_{ij}^{(2)\beta_0}$  dla  $(ij) \in \{(18), (28), (17), (27)\}$ . Jest on bardziej złożony niż  $K_{88}^{(2)\beta_0}$ , gdyż zawiera diagramy z pętlami kwarków  $c$ , co komplikuje postać amplitudy i zwiększa ilość zmiennych całkowania. Ponadto, nie wszystkie całki



Rysunek 3.1: Diagramy, których interferencje dają wkład do  $K_{88}^{(2)\beta_0}$ . Stosując metodę Voloshina-Smitha wystarczy uwzględnić w rachunku diagramy z pierwszej kolumny, z gluonem poza powłoką masy.

są możliwe do wykonania analitycznie. Ostateczne rezultaty podane są w postaci dopasowanych do wyników numerycznych wielomianów dwóch zmiennych: stosunku mas  $m_c/m_b$  oraz cięcia na energię fotonu  $\delta$ . W podobny sposób przedstawione zostaną obliczone w podrozdziale 3.4 i największe numerycznie poprawki  $K_{ij}^{(2)\beta_0}$  dla  $(ij) \in \{(11), (12), (22)\}$ .

## 3.2 Poprawka $K_{88}^{(2)\beta_0}$

### 3.2.1 Szczegóły rachunku

Wkład do poprawki  $K_{88}^{(2)\beta_0}$  daje sześć diagramów przedstawionych na rysunku 3.1. Należy uwzględnić interferencje diagramów z pierwszej i drugiej kolumny oraz osobno diagramów z trzeciej kolumny. Wykorzystanie metody Voloshina-Smitha (patrz równanie (3.9)) sprawia, że ilość diagramów niezbędnych do znalezienia poprawki  $K_{88}^{(2)\beta_0}$  redukuje się do sumy diagramów drzewowych z pierwszej kolumny rysunku 3.1, z gluonem będącym poza powłoką masy.

Diagramy, w których foton emitowany jest z linii kwarku  $s$  są źródłem rozbieżności kolinearnych, które prowadzą do pojawienia się dużych logarytmów  $\ln(m_b/m_s)$ . W związku z tym nie kładzie się masy kwarku  $m_s$  równej zero, choć zanedbywane są wyrazy potęgowe postaci  $(m_s/m_b)^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Jest to analogiczne do wykonanego w pracy [59] obliczenia  $K_{88}^{(1)}$  w rzędzie NLO.

Kolejność obliczeń jest następująca: moduł w kwadracie amplitudy danej przez sumę diagramów z pierwszej kolumny rysunku 3.1 jest sumowany (uśredniany) po spinach i kolorach cząstek końcowych (początkowych). Następnie wykonywana jest algebra Diraca w  $D = 4$  wymiarach. Otrzymany moduł w kwadracie amplitudy  $|\overline{\mathcal{M}}_{88}^{(1)}|^2$  (por. równanie (C.5)) jest funkcją wymierną zależną od iloczynów czteropędów oraz parzystych potęg mas. Następnie całkujemy po przestrzeni fazowej zgodnie z wyznaczonymi granicami. Na końcu wykonane jest całkowanie po „masie” gluonu.

Ze względu na to, że interferowane są amplitudy drzewowe, wszystkie całki po przestrzeni fazowej oraz całkę po „masie” gluonu daje się obliczyć analitycznie. W rezultacie końcowy wynik ma również postać analityczną.

Wyznamy granice całkowania po trójcząstkowej przestrzeni fazowej dla procesu

$$b_\alpha \longrightarrow s_\beta(k_1) + \gamma(k_2; \epsilon) + g_b(q; \eta), \quad (3.10)$$

z gluonem będącym poza powłoką masy, oraz z masywnym kwarkiem  $s$ ,  $m_s \neq 0$ . Granice całkowania po przestrzeni pędów znajdujemy korzystając z zasady zachowania czteropędu

$$p = k_1 + k_2 + q. \quad (3.11)$$

W układzie spoczynkowym kwarku  $b$  zasady zachowania energii i pędu są następujące

$$\begin{aligned} m_b &= E_s + E_\gamma + E_g, \\ 0 &= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

W pierwszej kolejności znajdziemy granice całkowania po energii gluonu. Podnosząc do kwadratu obie strony przekształconego nieco równania (3.11) dostajemy

$$(p - k_1)^2 = (k_2 + q)^2 \Rightarrow p^2 - 2pk_1 + k_1^2 = k_2^2 + 2qk_2 + q^2. \quad (3.13)$$

W układzie spoczynkowym kwarku  $b$  mamy  $pk_1 = m_b E_s$ . Iloczyn  $qk_2$  jest bardziej złożony

$$qk_2 = E_\gamma E_g - \mathbf{q} \mathbf{k}_2 = E_\gamma E_g - |\mathbf{q}| |\mathbf{k}_2| \cos \theta, \quad (3.14)$$

gdzie  $|\mathbf{k}_2| = E_\gamma$ ,  $|\mathbf{q}| = \sqrt{E_g^2 - q^2}$ , a  $\theta$  oznacza kąt między pędami  $\mathbf{q}$  i  $\mathbf{k}_2$ . Wstawiając powyższe tożsamości oraz (3.12) do (3.13) otrzymujemy:

$$m_b^2 - m_s^2 + q^2 - 2m_b E_\gamma + 2E_g(E_\gamma - m_b) = 2E_\gamma \sqrt{E_g^2 - q^2} \cos \theta. \quad (3.15)$$

Dla ustalonych  $E_\gamma$  i  $q^2$  energia gluonu  $E_g$  przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio dla  $\theta = 0$  i  $\theta = \pi$ . Wstawiamy do równania (3.15)  $\cos \theta = 1$  i podnosimy do kwadratu. Otrzymujemy w ten sposób równanie kwadratowe na energie gluonu z rozwiązaniami:

$$\begin{aligned} E_g^{min} &= \frac{(m_b^2 - m_s^2 + q^2 - 2m_b E_\gamma)(m_b - E_\gamma) - E_\gamma \sqrt{(m_b^2 - m_s^2 - q^2 - 2E_\gamma m_b)^2 - 4m_s^2 q^2}}{2m_b(m_b - 2E_\gamma)}, \\ E_g^{max} &= \frac{(m_b^2 - m_s^2 + q^2 - 2m_b E_\gamma)(m_b - E_\gamma) + E_\gamma \sqrt{(m_b^2 - m_s^2 - q^2 - 2E_\gamma m_b)^2 - 4m_s^2 q^2}}{2m_b(m_b - 2E_\gamma)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Wprowadźmy bezwymiarowe zmienne  $r = m_s^2/m_b^2$ ,  $v = q^2/m_b^2$ ,  $u = \frac{2pk_2}{m_b^2}$ ,  $t = \frac{2pq}{m_b^2}$  oraz  $s = \frac{2k_2q}{m_b^2}$ . W układzie spoczynkowym kwarku  $b$  zmienne  $u$  i  $t$  wyrażają się przez energie fotonu i gluonu,

$u = \frac{2E_\gamma}{m_b}$  oraz  $t = \frac{2E_g}{m_b}$ . W zmiennych  $u$  i  $t$  granice całkowania po energii gluonu są następujące

$$\begin{aligned} t_{min} &= \frac{(1-u-r+v)(2-u) - u\sqrt{(1-r-u-v)^2 - 4rv}}{2(1-u)}, \\ t_{max} &= \frac{(1-u-r+v)(2-u) + u\sqrt{(1-r-u-v)^2 - 4rv}}{2(1-u)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Całkując po energii fotonu dokonujemy jak zwykle cięcia  $E_\gamma > E_0$ , i dzięki temu nie jest dla nas istotny rejon przestrzeni fazowej, w którym pojawiałyby się rozbieżności podczerwone. Energia minimalna dana jest przez parametr  $\delta$ :  $E_0 \equiv \frac{m_b}{2}(1-\delta)$ . Wracając do równania (3.16), warunek  $E_g^{min} \leq E_g^{max}$  jest spełniony dla  $E_\gamma \in \left[0, \frac{1}{2} \left(m_b - \frac{m_s^2}{m_b} - \frac{q^2}{m_b} - 2\frac{m_s}{m_b}\sqrt{q^2}\right)\right]$ . Uwzględniając cięcie na energię fotonu znajdujemy następujące granice całkowania:

$$\begin{aligned} E_\gamma^{min} &= \frac{m_b}{2}(1-\delta), \\ E_\gamma^{max} &= \frac{1}{2} \left(m_b - \frac{m_s^2}{m_b} - \frac{q^2}{m_b} - 2\frac{m_s}{m_b}\sqrt{q^2}\right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

co równoważne jest granicom całkowania po  $u$  danym przez

$$\begin{aligned} u_{min} &= 1-\delta, \\ u_{max} &= 1-r-v-2\sqrt{rv}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Granice całkowania po „masie” gluonu  $v$  dostajemy z warunku  $u_{min} \leq u_{max}$ . Dla tych granic możemy położyć  $m_s = 0$ , ponieważ nie prowadzi to do rozbieżności. W konsekwencji całkowanie po kwadracie „masy” gluonu w równaniu (3.9) wykonane jest w granicach  $v \in [0, \delta]$ .

Wyraźmy teraz w zmiennych  $u, t, s$  poprawkę do szerokości rozpadu w rzędzie  $\alpha_s$  dla rozpadu trójciałowego  $b \rightarrow sg^*\gamma$  w  $D = 4$  wymiarach, gdzie gluon jest poza powłoką masy, a masa kwarku  $s$  pozostaje niezerowa. Otrzymujemy

$$\Gamma_{88}^{(1)} = \frac{m_b}{2^8 \pi^3} \int |\overline{\mathcal{M}}_8^{(1)}|^2 \delta(1+s-u-t+v-r) du dt ds. \quad (3.20)$$

Po wykonaniu całkowania po zmiennej  $s$  dostajemy:

$$\frac{d\Gamma_{88}^{(1)}}{du dt} = \frac{8G_F \alpha_{em} \alpha_s}{\pi^2} m_b^4 |V_{ts}^* V_{tb}|^2 C_8^2 \delta f_{88}(u, t, v), \quad (3.21)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \delta f_{88}(u, t, v) &= \frac{2}{27} \left( -\frac{rv^2}{u} - \frac{v^2}{u} + \frac{rv^2}{u^2} + \frac{v^2}{u^2} - rv - \frac{r^2v}{u} - \frac{14rv}{u} - \frac{v}{u} + \frac{r^2v}{u^2} + \frac{14rv}{u^2} \right. \\ &+ \frac{v}{u^2} - v - 2ru - 2u + \frac{2r^3}{u} - \frac{2r^2}{u} - \frac{2r}{u} + \frac{2}{u} - \frac{2r^3}{u^2} + \frac{2r^2}{u^2} + \frac{2r}{u^2} - \frac{2}{u^2} \Big) \\ &+ \frac{2}{27} \sigma \left( -\frac{r^2}{u} - \frac{vr}{2u} - 2r - \frac{v}{2u} + \frac{1}{u} - 2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{27\sigma} \left( -\frac{rv^3}{u} - \frac{v^3}{u} - rv^2 - \frac{12rv^2}{u} - v^2 - r^2v - 14rv - \frac{1}{2}ruv - \frac{uv}{2} + \frac{3r^3v}{u} \right. \\
& + \frac{13r^2v}{u} + \frac{13rv}{u} + \frac{3v}{u} - v + 2r^3 - 2r^2 - 2r + r^2u - u - \frac{2r^4}{u} + \frac{4r^2}{u} - \frac{2}{u} + 2 \Big) \\
& + \frac{2}{27\sigma^2} (-2r^4 + vr^3 + 2r^3 + v^2r^2 + 14vr^2 + 2r^2 + v^2r + vr - 2r) . \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Dla przejrzystości wyrażenia wprowadziliśmy nową zmienną  $\sigma = t - 1 + r - v$ . Powyższy wzór słuszny jest dla dowolnej masy kwarku  $s$ . Obecność rozbieżności kolinearnej uniemożliwia położenie  $m_s = 0$  wszędzie. Z drugiej strony obliczenia stają się wyjątkowo skomplikowane, gdy nie zaniedbamy masy kwarku  $s$ . Wyjściem z tej sytuacji jest wyizolowanie źródła rozbieżności kolinearnej w obszarze całkowania. W pozostałej części przestrzeni fazowej zaniedbamy masę kwarku  $s$ .

Całka po  $t$  jest rozbieżna, gdy  $r \rightarrow 0$  oraz  $t \rightarrow t_{max}$ . Jest to rozbieżność logarytmiczna. W celu jej wyodrębnienia rozwijamy  $t_{max}$  wokół  $r = 0$ . W obszarze bliskim  $t_{min}$  nie ma rozbieżności i możemy położyć tam  $r = 0$ . Granice, których użyjemy, mają postać:

$$\begin{aligned}
t_{min} &= 1 - u + \frac{v}{1 - u} , \\
t_{max} &= 1 + v - \frac{1 - v}{1 - u - v} r . \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Wynik całkowania po  $t$  przyjmuje następującą postać po położeniu  $r = 0$  wszędzie oprócz wyrazów zachowujących się jak  $\ln r$ :

$$\begin{aligned}
\delta f_{88}(u, v) &= -\frac{1}{54(1-u)^2u} \{ 2(1-u)^2 (2u^3 + u^2 - 8u + 8) - v(1-u) (3u^3 + 9u^2 - 32u + 24) \\
& + 2(1-u)^2 (2+v) (u^2 - 2(1-v)u + 2(1-v)^2) (\ln r + \ln(1-u) - 2\ln(1-u-v)) \\
& + 2v^2(u-2)u(3u-2) + v^3(8-16u+7u^2) \} . \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Ponieważ wyodrębniliśmy już wyrazy  $\sim \ln r$ , zaniedbanie masy kwarku  $s$  w przypadku całkowania po energii fotonu nie prowadzi do rozbieżności. Po położeniu  $r = 0$  granice całkowania są następujące:

$$\begin{aligned}
u_{min} &= 1 - \delta , \\
u_{max} &= 1 - v . \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Po wycalkowaniu (3.24) w granicach (3.25) dostajemy:

$$\Gamma_8^{(1)}(\delta, v) = \frac{G_F^2 \alpha_{em}}{32\pi^4} m_b^5 |V_{ts}^* V_{tb}|^2 C_8^2 \frac{\alpha_s}{\pi} f_{88}(\delta, v) , \tag{3.26}$$

gdzie

$$f_{88}(\delta, v) = \frac{2}{27} \left\{ \frac{2\pi^2}{3} + \frac{7\delta}{2} + \frac{3\delta^2}{2} - \frac{\delta^3}{3} + v \left( \frac{\delta^2}{2} - \frac{17\delta}{4} - \pi^2 - 3 \right) + v^2 \left( -2\delta - \frac{1}{2\delta} + 3 \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + v^3 \left( -\frac{1}{4\delta} + \frac{\pi^2}{3} + \frac{11}{6} \right) + (2+v) \left( \frac{1}{4} (\delta^2 + \delta(2-4v) + v(3v-2)) - (1-v)^2 \ln \left( \frac{1-v}{1-\delta} \right) \right) \ln r \\
& + \frac{1}{4} (2+v) \delta (\delta + 2 - 4v) (\ln \delta - 2 \ln(\delta - v)) + \left( v - v^2 - \frac{3v^3}{4} \right) (\ln \delta + 2 \ln(\delta - v)) + \frac{v^3}{2} \ln \delta \\
& + (1-v)^2 (2+v) \left( \ln^2(1-v) - \ln^2(1-\delta) - \ln(1-v) \ln v + \ln(1-\delta) \ln \delta - 2 \ln \frac{1-v}{1-\delta} \right) \\
& + (v^3 + 2v^2 - 2v) \ln v + (1-v)^2 (2+v) \left( \text{Li}_2(\delta) - \text{Li}_2(v) - 2\text{Li}_2 \left( \frac{1-v}{1-\delta} \right) \right). \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Funkcja  $f_{88}(\delta, v)$  w granicy  $v \rightarrow 0$  sprowadza się do dobrze znanej poprawki  $\phi_{88}^{(1)}(\delta)$  w rzędzie NLO [59].

Otrzymaną poprawkę w rzędzie NLO (ale dla  $v \neq 0$ ) wstawiamy do równania (3.9) i wykonujemy całkę po kwadracie pędu gluonu, dostając szukaną poprawkę w przybliżeniu BLM:

$$\Gamma_{88}^{(2)\beta_0} = \frac{G_F^2 \alpha_{em}}{32\pi^4} m_b^5 |V_{ts}^* V_{tb}|^2 C_8^2 \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 K_{88}^{(2)\beta_0}, \tag{3.28}$$

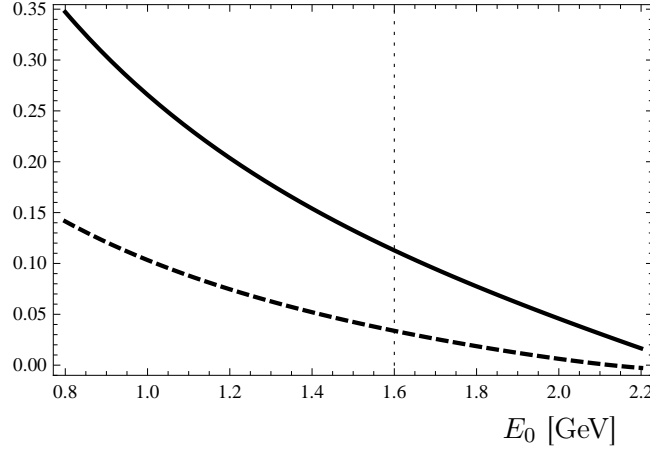
gdzie

$$\begin{aligned}
K_{88}^{(2)\beta_0} &= 4\beta_0 \left[ \phi_{88}^{(1)}(\delta) L_b + h_{88}^{(2)}(\delta) \right], \\
h_{88}^{(2)}(\delta) &= -\frac{2}{27} \left\{ -\frac{787}{36} \delta - \frac{227}{36} \delta^2 + \frac{41}{36} \delta^3 + \left( \frac{2}{3} \pi^2 - \frac{151}{9} + 10 \ln \delta - 2 \ln^2 \delta \right) \ln(1-\delta) \right. \\
&+ \left( -\frac{16}{3} \delta - \frac{5}{3} \delta^2 + \frac{1}{9} \delta^3 + \left( 1 + \frac{1}{2} \delta \right) \delta \ln \delta - 6 \ln(1-\delta) + 2 \ln(1-\delta) \ln \delta + 2 \text{Li}_2(\delta) \right) \ln r \\
&\left. + \delta \left( 1 + \frac{1}{2} \delta \right) \left( \frac{1}{3} \pi^2 - \ln^2 \delta \right) + \left( \frac{53}{6} \delta + \frac{19}{6} \delta^2 - \frac{4}{9} \delta^3 \right) \ln \delta + (10 - 4 \ln(\delta)) \text{Li}_2(\delta) + 4 \text{Li}_3(\delta) \right\}. \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Odpowiedni wkład do spektrum energii fotonu można otrzymać poprzez zróżniczkowanie  $K_{88}^{(2)\beta_0}$  po zmiennej  $\delta$ . Po obliczeniu pochodnej wynik (3.29) zgadza się z rezultatami pracy [41].

### 3.2.2 Opis wyników numerycznych

Analiza numeryczna obliczonej poprawki (3.28) została przeprowadzona przy skali renormalizacji  $\mu_b = 2.5 \text{ GeV}$  (por. rozdział 1.2), dla której silna stała sprzężenia przyjmuje wartość  $\alpha_s(2.5 \text{ GeV}) = 0.271$ , a odpowiednie współczynniki Wilsona wynoszą  $C_7^{(0)\text{eff}}(2.5 \text{ GeV}) = -0.3688$  oraz  $C_8^{(0)\text{eff}}(2.5 \text{ GeV}) = -0.171$  (patrz tabela 1.1). Przyjęto, że wartość masy kwarku  $b$  wynosi  $m_b = m_b^{1S} = 4.68 \text{ GeV}$  [14]. Wpływ poprawki  $\Gamma_{88}^{(2)\beta_0}$  na wartość centralną szerokości rozpadu  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  w zależności od cięcia na energię fotonu  $E_0 \in [0.8, 2.2] \text{ GeV}$  został zilustrowany na wykresie 3.2. Otrzymany wynik (3.28) został na nim przedstawiony w procentach w postaci znormalizowanej do wyrazu wiodącego  $\Gamma_0$  (równanie 2.15), dla stosunków mas  $m_b/m_s = 50$  (linia ciągła) oraz  $m_b/m_s = 10$  (linia przerywana). Uzasadnienie przyjęcia zakresu wartości  $m_b/m_s \in [10, 50]$  przedstawiliśmy w podrozdziale 2.1.

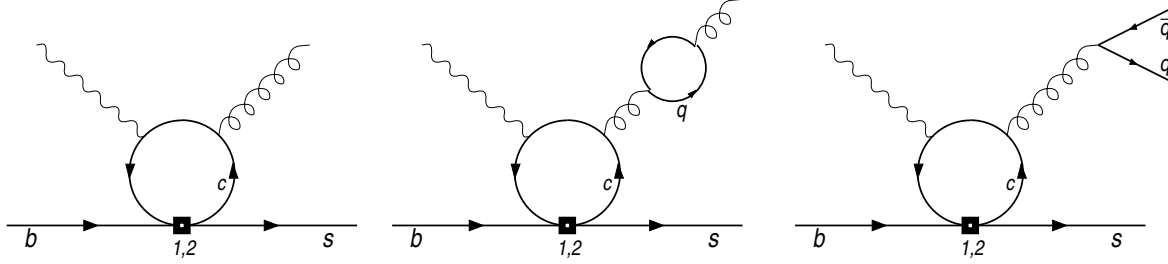


Rysunek 3.2: Zależność poprawki  $\Gamma_{88}^{(2)\beta_0}/\Gamma_0[\%]$  od cięcia na energię fotonu  $E_0 \in [0.8, 2.2]$  GeV dla stosunku  $m_b/m_s = 50$  (linia ciągła) oraz dla  $m_b/m_s = 10$  (linia przerywana). Pionowa kropkowana linia oznacza wartość centralną  $E_0 = 1.6$  GeV.

Podobnie do rozważanych w poprzednim rozdziale wkładów wiodącego rzędu również i w obecnym przypadku obecność rozbieżności kolinearnej sprawia, że obliczony wkład do szerokości rozpadu partonowego może być jedynie zgrubnym oszacowaniem odpowiedniego wkładu do szerokości rozpadu hadronowego. Na szczęście interferencja własna dipolowego operatora gluonowego  $P_8$  jest silnie tłumiona w rozpadach  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  zarówno przez mały czynnik  $(Q_d C_8 / C_7)^2 \simeq 1/36$ , jak i względnie duże cięcie na energię fotonu  $E_0 \sim m_b/3$ . Obliczenie poprawki  $K_{88}^{(2)\beta_0}$  dostarcza jedynie potwierdzenia, że żadne niespodziewane duże czynniki numeryczne nie pojawiają się na poziomie rachunku perturbacyjnego w wyrazach rzędu NNLO. Efekt numeryczny wyznaczonej poprawki na szerokość rozpadu  $b \rightarrow X_s^p \gamma$  w punkcie  $E_0 = 1.6$  GeV nie przekracza 0.2% czyli jest bardzo mały w porównaniu z niepewnościami przedyskutowanymi w podrozdziale 1.2.

Autorzy pracy [41] równolegle obliczyli rozważaną poprawkę otrzymując ten sam wynik. Ponadto, w celu dokładniejszego oszacowania wpływu kolinearnych logarytmów wykonali oni ich resumację. W wyniku resumacji wartość otrzymanej poprawki uległa ponad dwukrotnemu zmniejszeniu do ok. 0.05% (dla  $E_0 = 1.6$  GeV) wartości centralnej. Ten sam wynik można uzyskać, przyjmując w równaniu (3.28) wartość stosunku  $m_b/m_s = 14$ .

W pracy [41] dokonano także oszacowania efektów nieperturbacyjnych dających wkład do szerokości rozpadu hadronowego  $\Gamma(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$  i pochodzących od interferencji własnej operatora dipolowego  $P_8$ . Oszacowanie to mieści się w zakresie  $\pm 0.4\%$  wartości centralnej. Zauważalnie większą niepewność w związanych z tym wkładem efektach nieperturbacyjnych ( $[-0.3\%, 1.9\%]$ ) otrzymali autorzy artykułu [9], choć ich analiza oparta była jedynie na rachunku perturbacyjnym w rzędzie  $\mathcal{O}(\alpha_s)$ . Niepewność ta stanowi znaczący wkład do całej oszacowanej przez nich niepewności nieperturbacyjnej ( $\pm 5\%$ ), o której wspominaliśmy w podrozdziale 1.2.



Rysunek 3.3: Diagramy z operatorami  $P_{1,2}$ , których interferencje dają wkład do  $K_{18}^{(2)\beta_0}$  i  $K_{28}^{(2)\beta_0}$ . Trzeba uwzględnić także analogiczne diagramy z zamienioną kolejnością wierzchołków fotonowego i gluonowego na linii kwarku  $c$ .

### 3.3 Poprawki $K_{18}^{(2)\beta_0}$ , $K_{28}^{(2)\beta_0}$ , $K_{17}^{(2)\beta_0}$ oraz $K_{27}^{(2)\beta_0}$

#### 3.3.1 Szczegóły rachunku

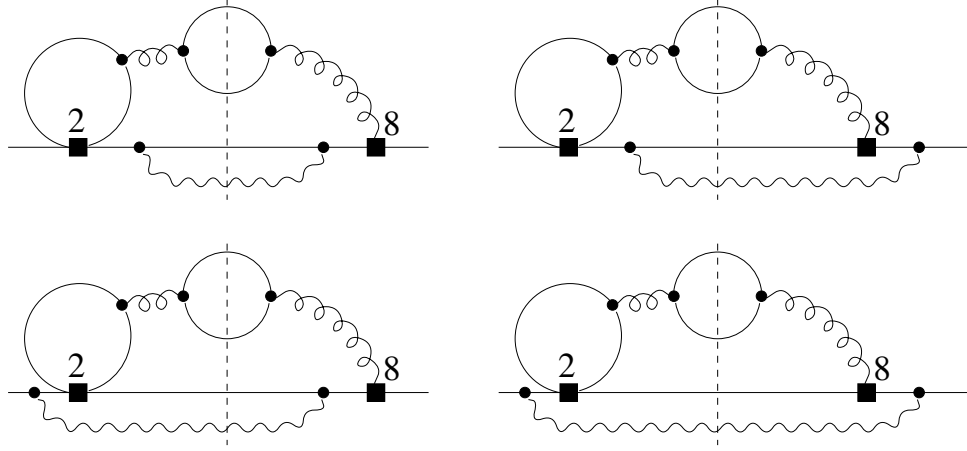
Jednym z głównych wyników tej rozprawy doktorskiej jest obliczenie po raz pierwszy poprawek  $K_{18}^{(2)\beta_0}$  i  $K_{28}^{(2)\beta_0}$ , pochodzących od interferencji amplitud generowanych przez operatory  $P_{1,2}$  typu prąd-prąd oraz przez rozważany już dipolowy operator gluonowy  $P_8$ . Wyniki tych obliczeń zostały również przedstawione w artykule [6]. Wkład do poprawek  $K_{18}^{(2)\beta_0}$  oraz  $K_{28}^{(2)\beta_0}$  dają diagramy zamieszczone na rysunku 3.3, a dokładniej ich interferencja z diagramami z rysunku 3.1. Obliczenie wkładów z operatorami  $P_{1,2}$  jest trudniejszym zadaniem niż rachunek poprawki  $K_{88}^{(2)\beta_0}$ , gdyż podstawowy diagram w rzędzie  $\alpha_s$  i z gluonem poza powłoką masy (pierwszy diagram na rysunku 3.3) zawiera pętlę z kwarkiem  $c$ . Z pętli emitowane są foton i gluon. Istnieje w związku z tym konieczność obliczenia jednopętlowej trzypunktowej funkcji Greena. Jest to jedna z prostszych funkcji pętlowych. Liczba zmiennych całkowania została jednakże powiększona o dwie zmienne Feynmana w porównaniu z obliczeniem  $K_{88}^{(2)\beta_0}$  opisanym w poprzednim podrozdziale. W sumie jest pięć zmiennych całkowania: energia fotonu i gluonu, kwadrat pędu gluonu oraz dwie zmienne Feynmana ( $x$  i  $y$ ). W przypadku operatora  $P_1$ , czynnik kolorowy modyfikuje analogiczny wynik z uwzględnieniem operatora  $P_2$  zgodnie z regułą  $T^a \rightarrow T^b T^a T^b = -\frac{1}{6} T^a$ , co prowadzi do prostej relacji

$$K_{18}^{(2)\beta_0} = -\frac{1}{6} K_{28}^{(2)\beta_0}. \quad (3.30)$$

Zgodnie z konwencją wprowadzoną w artykule [40], diagramy przedstawione na rysunku 3.4 nie są uwzględnione w przybliżeniu BLM, pomimo tego, że zależą od  $n_l$ . Są one powiązane równaniami grupy renormalizacji z drzewowymi wkładami elementów macierzowych  $b \rightarrow sq\bar{q}\gamma$  pochodzącymi od operatorów  $Q_3, \dots, Q_6$ , omówionymi w rozdziale 2. Inne diagramy generowane przez operator  $P_2$  nie występują, ponieważ diagram z pętlą kwarków  $c$  znika w przypadku, gdy jest z niej emitowany jedynie foton na powłoce masy.

W dalszej części niniejszego podrozdziału opiszemy łącznie obliczanie poprawek  $K_{28}^{(2)\beta_0}$  oraz  $K_{27}^{(2)\beta_0}$ . Przypadki  $K_{18}^{(2)\beta_0}$  oraz  $K_{17}^{(2)\beta_0}$  nie muszą być rozpatrywane oddzielnie ze względu na





Rysunek 3.4: Diagramy Feynmana wykluczone z  $K_{28}^{(2)\beta_0}$ . Przedstawiają one wkłady do interferencji w sposób analogiczny do rys. 1.4.

relację (3.30) oraz analogiczny związek  $K_{17}^{(2)\beta_0} = -\frac{1}{6}K_{27}^{(2)\beta_0}$ .

Amplituda opisywana przez pierwszy diagram na rysunku 3.3 z operatorem  $P_2$  dana jest przez

$$\mathcal{M}_2 \equiv \frac{4G_F e g_s}{\sqrt{2}} V_{ts}^* V_{tb} Q_u \bar{s} \gamma_\sigma P_L J_{\mu\nu} e^\mu \eta^\nu \gamma^\sigma P_L b,$$

gdzie

$$J_{\mu\nu} = \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{[\not{l} + \not{q} - m_c] \gamma_\nu [\not{l} - m_c] \gamma_\mu [\not{l} - \not{k}_2 - m_c] - [\not{l} - \not{k}_2 + m_c] \gamma_\mu [\not{l} + m_c] \gamma_\nu [\not{l} + \not{q} + m_c]}{[(l+q)^2 - m_c^2 + i\varepsilon][(l-k_2)^2 - m_c^2 + i\varepsilon][l^2 - m_c^2 + i\varepsilon]}.$$
(3.31)

W celu wykonania całki w  $D$  wymiarach po pędzie  $l$  wprowadzamy parametryzację Feynmana w zmiennych  $x$  i  $y$

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{x}{[axy + bx(1-y) + c(1-x)]},$$
(3.32)

oraz dokonujemy przesunięcia zmiennej całkowania

$$l = \tilde{l} - q(1-x) + k_2 xy.$$
(3.33)

Po wykonaniu powyższych przekształceń w wyrażeniu na  $J_{\mu\nu}$  występują dwa rodzaje całek po pędzie  $\tilde{l}$

$$I_0 = \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D \tilde{l}}{(2\pi)^D} \frac{1}{[\tilde{l}^2 - \Delta^2]^3},$$

$$I_2^{\mu\nu} = \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D \tilde{l}}{(2\pi)^D} \frac{\tilde{l}^\mu \tilde{l}^\nu}{[\tilde{l}^2 - \Delta^2]^3}, \quad (3.34)$$

gdzie

$$\Delta^2 = -q^2 x(1-x) - 2qk_2 x(1-x)y + m_c^2 - i\varepsilon. \quad (3.35)$$

Niezerowe są tylko całki z parzystą potęgą  $\tilde{l}$  w liczniku. Całki z nieparzystym wykładnikiem  $\tilde{l}$  w amplitudzie znikają po odcałkowaniu po pełnym zakresie zmiennej  $\tilde{l}$ .

Całki (3.34) po obliczeniu i rozwinięciu w szereg w  $\epsilon$  są następujące:

$$\begin{aligned} I_0 &= -\frac{i}{16\pi^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{\Delta^2} \right)^\epsilon \frac{1}{\Delta^2} \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{\Gamma(3)} = -\frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{\Delta^2} \left[ 1 - \epsilon \ln \left( \frac{\Delta^2}{4\pi\mu^2} \right) - \gamma_E \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right], \\ I_2^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} \frac{i}{64\pi^2} \left[ \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E - \ln \left( \frac{\Delta^2}{4\pi\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

W całce  $I_2^{\mu\nu}$  występują wyrazy ultrafioletowo rozbieżne typu  $1/\epsilon$ , które skracają się po dodaniu diagramów z zamienioną kolejnością emisji fotonu i gluonu z linii kwarku  $c$ . Oznacza to, że wielkość (3.31) nie zawiera rozbieżności ultrafioletowych. Całki  $I_0$  oraz  $I_2^{\mu\nu}$  występują addytywnie w amplitudzie (3.31), w związku z czym w członach zawierających całkę  $I_0$  wyrazy rzędu  $\epsilon$  nie mnożą żadnych członów  $1/\epsilon$ , i znikają po położeniu  $D = 4$  ( $\epsilon = 0$ ).

Wielkość  $\Delta^2$  w równaniu (3.35) jest wielkością wymiarową. Wprowadźmy wielkość bezwymiarową

$$\frac{\Delta^2}{m_c^2} = 1 - \frac{v}{\rho} x(1-x) - \frac{s}{\rho} x(1-x)y - i\varepsilon, \quad (3.37)$$

gdzie zastosowaliśmy takie same oznaczenia jak w poprzednim podrozdziale ( $v = q^2/m_b^2$ ,  $s = 2(qk_2)/m_b^2$ ,  $\rho = m_c^2/m_b^2$ ) oraz przeddefiniowaliśmy parametr  $\varepsilon \rightarrow m_c^2 \varepsilon$ . Przed obliczeniem modułu w kwadracie amplitudy  $\mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_7 + \mathcal{M}_8$ , zostało wykonane całkowanie po parametrze Feynmana  $y$ . Również na tym etapie uproszczono amplitudę usuwając z niej wszystkie powtarzające się indeksy Lorentza, przy wykorzystaniu tożsamości dla macierzy Diraca. Dokończenie przekształceń opartych na algebrze Diraca wykonano później, po obliczeniu modułu amplitudy w kwadracie. Brak występowania nieznikających śladów z nieparzystą ilością macierzy  $\gamma_5$  umożliwił zastosowanie schematu NDR, w którym macierz ta antykomutuje z pozostałymi macierzami  $\gamma^\mu$  w  $D = 4 - 2\epsilon$  wymiarach.

Całkowanie po parametrze Feynmana  $y$  skutkuje pojawieniem się w amplitudzie funkcji typu  $z^n \ln[1 - (s_\rho + v_\rho)(1-z)z]$  oraz  $z^n \ln[1 - v_\rho(1-z)z]$ , gdzie  $v_\rho = v/\rho$ ,  $s_\rho = s/\rho$ ,  $z = 1-x$  oraz  $n = -1, -2, 0, 1, 2$ . Dla danej wartości  $v_\rho$ , gluon może mieć wystarczająco dużą energię, aby para  $c\bar{c}$  weszła na powłokę masy. Odpowiada to zerowej wartości argumentu funkcji  $\ln[1 - v_\rho(1-z)z]$ . W tym miejscu przestrzeni fazowej amplituda ma istotną osobliwość, i zyskuje część urojoną. Analogiczna sytuacja zachodzi dla fotonu, co odpowiada przejściu argumentu funkcji  $\ln[1 - (s_\rho + v_\rho)(1-z)z]$  przez zero. Argument logarytmu  $\ln[1 - (s_\rho + v_\rho)(1-z)z]$  jest funkcją kwadratową w zmiennej  $z$ , co przyczynia się do istnienia w przestrzeni fazowej logarytmicznie rozbieżnych „grzbietów” w kształcie parabol. Dodatkową trudność w całkowaniu numerycznym sprawia wzór Voloshina-Smitha (3.9), w którym jest obecny wyraz zawierający różnicę szerokości rozpadu w rzędzie  $\alpha_s$ ,  $(\Gamma^{(1)}(v) - \Gamma^{(1)}(0))/v$ , gdzie  $\Gamma^{(1)}(v)$  odpowiada na przykład

elementowi macierzowemu  $\overline{\mathcal{M}_2\mathcal{M}_8^*} + \text{h.c.}$  Rozpatrując wkłady od operatorów typu prąd-prąd napotykamy rozbieżności podczerwone zarówno w funkcji  $\Gamma^{(1)}(v)$  jak i w przypadku  $\Gamma^{(1)}(v=0)$ . Podczas całkowania numerycznego różnicy  $(\Gamma^{(1)}(v) - \Gamma^{(1)}(0))/v$  występują w przestrzeni fazowej regiony, w których rozbieżności powinny kasować się do skończonej wartości, dążącej do zera dla  $v \rightarrow 0$ . Regiony te przyczyniają się do niestabilności całkowania numerycznego, a co za tym idzie do zmniejszenia wiarygodności wyniku. Dlatego też dążymy do tego, aby możliwie najwięcej niezbędnych całkowań wykonać analitycznie. Wpominiana wyżej osobliwość amplitudy wywołana przez rzeczywiste pary  $c\bar{c}$  sprawia, że całkowanie po przestrzeni fazowej jest trudniejsze w porównaniu z poprawką  $K_{88}^{(2)\beta_0}$ , i całkowanie po co najmniej jednej zmiennej nie może być wykonane analitycznie.

Rozważmy teraz całkowanie wyrazu interferencyjnego

$$U(\rho; v, s, u, z) = \overline{\mathcal{M}_2\mathcal{M}_8^*} + \overline{\mathcal{M}_8\mathcal{M}_2^*} \equiv \frac{1}{2 \cdot 3} \sum_{\text{spin, color}} (\mathcal{M}_2\mathcal{M}_8^* + \mathcal{M}_8\mathcal{M}_2^*) . \quad (3.38)$$

Odcałkowywanie po kolejnych zmiennych będzie skutkować eliminacją tych zmiennych z listy argumentów funkcji podcałkowej  $U(\rho; v, s, u, z)$  oraz pojawieniem się zależności od parametru  $\delta$ , obecnego w granicach całkowania. Parametry niebędące zmiennymi całkowania zostały oddzielone średnikiem. Możliwe jest odcałkowanie analityczne po zmiennej  $u$ , gdyż zależność od niej pojawia się jedynie w postaci funkcji wymiernej. Konieczność wykonania cięcia na energię fotonu komplikuje zamianę kolejności całkowania zmiennych  $s$  i  $u$ . Gdy całkujemy po zmiennej  $u$  w pierwszej kolejności, konieczne jest wyróżnienie dwóch obszarów całkowania

$$\int_{1-\delta}^{1-v} du \int_{\frac{uv}{1-u}}^u ds U(\rho; v, s, u, z) = \int_{\frac{(1-\delta)v}{\delta}}^{1-\delta} ds \int_{1-\delta}^{\frac{s}{s+v}} du U(\rho; v, s, u, z) + \int_{1-\delta}^{1-v} ds \int_s^{\frac{s}{s+v}} du U(\rho; v, s, u, z) . \quad (3.39)$$

Dwa obszary całkowania po zmiennej  $s$  (równanie (3.39)) reorganizujemy wprowadzając dwie funkcje  $U_i(\delta, \rho; v, s, z)$ ,  $i = 1, 2$ , w następujący sposób

$$\int_{1-\delta}^{1-v} du \int_{\frac{uv}{1-u}}^u ds U(\rho; v, s, u, z) = \int_{\frac{(1-\delta)v}{\delta}}^{1-\delta} ds U_1(\delta, \rho; v, s, z) + \int_{1-\delta}^{1-v} ds U_2(\delta, \rho; v, s, z) . \quad (3.40)$$

Dokonujemy następnie rozdzielenia funkcji  $U_i(\delta, \rho; v, s, z)$  na część fotonową ( $ph$ ), zawierającą logarytmy typu  $\ln[1 - (s_\rho + v_\rho)(1 - z)z]$  oraz część gluonową ( $gl$ ), zawierającą logarytmy typu  $\ln[1 - v_\rho(1 - z)z]$

$$U_i(\delta, \rho; v, s, z) = U_i^{ph}(\delta, \rho; v, s, z) + U_i^{gl}(\delta, \rho; v, s, z) . \quad (3.41)$$

Żądamy przy tym, aby dla danych parametrów  $\delta, \rho, v, s$ , istniała granica

$$\lim_{z \rightarrow 0} U_i^{ph, gl}(\delta, \rho; v, s, z) = g_i(\delta, \rho, v, s) \quad (3.42)$$

w postaci funkcji  $g_i$  zależnej od tych parametrów. Nałożenie powyższego warunku jest ważne,

ponieważ w wyjściowej funkcji  $U_i(\delta, \rho; v, s, z)$  występują wyrazy proporcjonalne do  $1/z$ , które muszą zostać tak rozdzielone po prawej stronie równania (3.41), aby nie prowadziło to do powstawania sztucznych rozbieżności przy całkowaniu po zmiennej  $z \in [0, 1]$ .

Funkcje  $U_i^{gl}(\delta, \rho; v, s, z)$  spełniają ponadto warunek

$$\lim_{v \rightarrow 0} U_i^{gl}(\delta, \rho; v, s, z) = 0, \quad (3.43)$$

co z kolei ułatwia skorzystanie ze wzoru Voloshina-Smitha (równanie (3.9)). Po narzuceniu warunku (3.43) funkcje  $U_i^{gl}(\delta, \rho; v, s, z)$  nie dają wkładu do poprawek  $\phi_{27}^{(1)}$  i  $\phi_{28}^{(1)}$ .

Wprowadzamy następnie nową zmienną  $t = s + v$ . Zamiana zmiennych  $s \rightarrow t - v$  modyfikuje granice całkowania w równaniu (3.40)

$$\begin{aligned} i = 1 & : \quad \frac{v}{\delta} < t < 1 - \delta + v, \\ i = 2 & : \quad 1 - \delta + v < t < 1. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Po wprowadzeniu nowej zmiennej  $t$  zależność od zmiennej  $z$  ulegnie ujednoliceniu do postaci  $z^n \ln(1 - \tau(1 - z)z)$ , gdzie  $n = -2, -1, \dots, 2$ , oraz  $\tau = v_\rho$  lub  $\tau = t_\rho \equiv t/\rho$ .

Całkujemy następnie funkcję  $U_i^{ph,gl}(\delta, \rho; v, t, z) \equiv U_i^{ph,gl}(\delta, \rho; v, t - v, z)$  po parametrze Feynmana  $z$ . Wszystkie całki typu

$$\int_0^1 dz z^n \ln[1 - \tau(1 - z)z - i\varepsilon], \quad n = -2, -1, 0, 1, 2 \quad (3.45)$$

wyrażają się przez następujące dwie funkcje:

$$T(\tau) = \begin{cases} \sqrt{\frac{4-\tau}{\tau}} \arctg \sqrt{\frac{\tau}{4-\tau}} & , \tau < 4, \\ \sqrt{\frac{\tau-4}{\tau}} \ln \left[ \frac{1}{2}(\sqrt{\tau} + \sqrt{\tau-4}) \right] - i\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\tau-4}{\tau}} & , \tau \geq 4, \end{cases} \quad (3.46)$$

$$G(\tau) = \begin{cases} -2 \arctg^2 \left[ \sqrt{\frac{\tau}{4-\tau}} \right] & , \tau < 4, \\ 2 \ln^2 \left[ \frac{1}{2}(\sqrt{\tau} + \sqrt{\tau-4}) \right] - \frac{\pi^2}{2} - 2i\pi \ln \left[ \frac{1}{2}(\sqrt{\tau} + \sqrt{\tau-4}) \right] & , \tau \geq 4. \end{cases} \quad (3.47)$$

Zachodzi przy tym relacja

$$G(\tau) = -2 \frac{\tau}{4-\tau} T^2(\tau). \quad (3.48)$$

Funkcja  $G(\tau)$  została podana w artykule [60]. Obie funkcje mają następujące granice  $\lim_{\tau \rightarrow 0} G(\tau) = 0$  i  $\lim_{\tau \rightarrow 0} T(\tau) = 1$ . Cięcie w płaszczyźnie zespolonego argumentu logarytmu przebiega wzdłuż ujemnej półosi rzeczywistej.

Konkretne całki występujące w naszym rachunku wyrażają się następująco przez zdefiniowane powyżej funkcje:

$$\int_0^1 dz z^2 \ln[1 + \tau(1 - z)z - i\varepsilon] = \left( -\frac{13}{18} + \frac{2}{3\tau} + \frac{2}{3} \frac{\tau-1}{\tau} \right) T(\tau),$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 dz \, z \ln [1 + \tau(1-z)z - i\varepsilon] &= 2T(\tau) - 1, \\
 \int_0^1 dz \, \ln [1 + \tau(1-z)z - i\varepsilon] &= 2T(\tau) - 2, \\
 \int_0^1 dz \, \frac{\ln [1 + \tau(1-z)z - i\varepsilon]}{z} &= G(\tau), \\
 \int_0^1 dz \, \left( \frac{\ln [1 + \tau(1-z)z - i\varepsilon]}{z^2} + \frac{\tau}{z} \right) &= 2\tau T(\tau) - \tau.
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Po odcałkowaniu po zmiennej  $z$  możemy podać jawnie odpowiednią poprawkę w rzędzie NLO, której uogólnienie na przypadek  $v \neq 0$  umożliwi nam obliczenie szukanych poprawek BLM-NNLO  $\phi_{27}^{(2)\beta_0}(\delta)$  i  $\phi_{28}^{(2)\beta_0}(\delta)$

$$\phi_{28}^{(1)}(\delta) = \sum_{i=1,2} U_i^{ph}(\delta, \rho; v=0). \tag{3.50}$$

Funkcja (3.50) wyraża się przez całki z części rzeczywistej funkcji  $G(\tau)$  [10]

$$\begin{aligned}
 \phi_{28}^{(1)}(\delta) &= \frac{8}{27}\rho \left\{ \delta \int_0^{1-\delta} dt \operatorname{Re} \left[ G\left(\frac{t}{\rho}\right) + \frac{t}{2\rho} \right] + \int_{1-\delta}^1 dt (1-t) \operatorname{Re} \left[ G\left(\frac{t}{\rho}\right) + \frac{t}{2\rho} \right] \right\}, \\
 \phi_{27}^{(1)}(\delta) &= -3\phi_{28}^{(1)}(\delta),
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Postać (3.51) jest standardową postacią poprawki  $\phi_{28}^{(1)}(\delta)$  podawaną w literaturze. Po odcałkowaniu funkcji (3.51) po zmiennej  $t$  dostajemy

$$\phi_{28}^{(1)}(\delta) = \frac{2}{81}\delta (3 - 3\delta + \delta^2) - \frac{8}{27}\rho^2 \left[ (1-\delta)p \left( \frac{1-\delta}{\rho} \right) - p \left( \frac{1}{\rho} \right) + \rho p_t \left( \frac{1}{\rho} \right) - \rho p_t \left( \frac{1-\delta}{\rho} \right) \right], \tag{3.52}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \int_0^x d\tau \operatorname{Re} G(\tau) = x - 2x \operatorname{Re} T(x) + (x-2) \operatorname{Re} G(x), \\
 p_t(x) &= \int_0^x d\tau \, \tau \operatorname{Re} G(\tau) = \frac{1}{8} [x(x+12) - 4x(x+6) \operatorname{Re} T(x) + 4(x^2+6) \operatorname{Re} G(x)].
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Pozostało całkowanie po zmiennych  $t$  i  $v$ . W przypadku części gluonowej kolejność całkowania nie zmienia się, W pierwszej kolejności wykonano całkowanie po zmiennej  $t$  w granicach (3.44), otrzymując funkcję

$$U^{gl}(\delta, \rho; v) = \operatorname{Re} \left[ U_1^{gl}(\delta, \rho; v) + U_2^{gl}(\delta, \rho; v) \right]. \tag{3.54}$$

Funkcja  $U^{gl}(\delta, \rho; v)$  zależy tylko od części rzeczywistych funkcji  $U_i^{gl}$ ,  $i = 1, 2$ , ponieważ tylko one dają wkład do procesu  $b \rightarrow s\gamma q\bar{q}$ . To samo dotyczy funkcji  $U^{ph}(\delta, \rho; v, t)$ , dla której przyjmujemy od tego miejsca  $U^{ph}(\delta, \rho; v, t) \rightarrow \text{Re } U^{ph}(\delta, \rho; v, t)$ .

Przeprowadzenie całkowania analitycznego po zmiennej  $t$  w części fotonowej jest niemożliwe, ponieważ zmienna  $t$  występuje w argumentach funkcji  $G(t/\rho)$  oraz  $T(t/\rho)$ . Możliwe jest jednak analityczne całkowanie po zmiennej  $v$ .

Odcalkowanie części fotonowej  $U_i^{ph}(\delta, \rho; v, t)$  po zmiennej  $v$  wymaga zamiany kolejności zmiennych całkowania  $t$  i  $v$  według następującego schematu

$$\begin{aligned}
i = 1 \quad : \quad & \int_0^\delta dv \frac{\int_{\frac{v}{\delta}}^{1-\delta+v} dt U_1^{ph}(\delta, \rho; v, t) - \int_0^{1-\delta} dt U_1^{ph}(\delta, \rho; 0, t)}{v} = \\
& = \int_0^{1-\delta} dt \int_0^{t\delta} dv \frac{U_1^{ph}(\delta, \rho; v, t) - U_1^{ph}(\delta, \rho; 0, t)}{v} + \int_{1-\delta}^1 dt \int_{t+\delta-1}^{t\delta} dv \frac{U_1^{ph}(\delta, \rho; v, t) - U_1^{ph}(\delta, \rho; 0, t)}{v} \\
& + \int_0^1 dt U_1^{ph}(\delta, \rho; 0, t) \ln t + \int_{1-\delta}^1 dt (\ln \delta - \ln(t + \delta - 1)) U_1^{ph}(\delta, \rho; 0, t) \\
i = 2 \quad : \quad & \int_0^\delta dv \frac{\int_{1-\delta+v}^{1-\delta} dt U_2^{ph}(\delta, \rho; v, t) - \int_{1-\delta}^1 dt U_2^{ph}(\delta, \rho; 0, t)}{v} = \\
& = \int_{1-\delta}^1 dt \int_0^{t+\delta-1} dv \frac{U_2^{ph}(\delta, \rho; v, t) - U_2^{ph}(\delta, \rho; 0, t)}{v} - \int_{1-\delta}^1 dt U_2^{ph}(\delta, \rho; 0, t) [\ln \delta - \ln(t + \delta - 1)] .
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Zdefiniujmy funkcje  $\tilde{U}_i^{ph}(\delta, \rho; t)$ , powstałe po odcalkowaniu funkcji  $U_i^{ph}(\delta, \rho; t)$  po zmiennej  $v$

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_1^{ph}(\delta, \rho; t) &= \int_0^{t\delta} dv \frac{U_1^{ph}(\delta, \rho; v, t) - U_1^{ph}(\delta, \rho; 0, t)}{v} , \\
\tilde{U}_2^{ph}(\delta, \rho; t) &= \int_{t+\delta-1}^{t\delta} dv \frac{U_2^{ph}(\delta, \rho; v, t) - U_2^{ph}(\delta, \rho; 0, t)}{v} + \int_0^{t+\delta-1} dv \frac{U_2^{ph}(\delta, \rho; v, t) - U_2^{ph}(\delta, \rho; 0, t)}{v} .
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Ostatecznie funkcja  $h_{ij}^{(2)}(\delta)$ ,  $(ij) = (18), (28)$  z równania (3.7) wyraża się przez całkę po jednej zmiennej

$$h_{28}^{(2)\beta_0} = - \left\{ \int_0^\delta dv \frac{U^{gl}(\delta, \rho; v)}{v} + \int_0^{1-\delta} dt \tilde{U}_1^{ph}(\delta, \rho; t) + \int_{1-\delta}^1 dt \tilde{U}_2^{ph}(\delta, \rho; t) + \int_0^1 dt \ln t U_1^{ph}(\delta, \rho; 0, t) \right\}$$

$$+ \int_{1-\delta}^1 dt \left( U_1^{ph}(\delta, \rho; 0, t) - U_2^{ph}(\delta, \rho; 0, t) \right) [\ln \delta - \ln(t + \delta - 1)] + \phi_{28}^{(1)}(\delta) \left( \ln(\delta) - \frac{5}{3} \right) \Bigg\}. \quad (3.57)$$

Dalsze całkowanie analityczne nie jest możliwe, ponieważ w funkcjach  $U_i^{gl/ph}(\delta, \rho, x)$  występują wyrazy postaci  $\ln x G(x)$  lub  $\frac{\ln x}{x} \text{Li}_2(x)$  oraz inne będące niecałkowalnymi analitycznie funkcjami zależnymi od parametrów  $\delta$ ,  $\rho$  oraz zmiennych  $v$  albo  $t$ .

### 3.3.2 Opis wyników numerycznych

Nasz końcowy wynik na poprawkę  $h_{28}^{(2)\beta_0}$  przedstawiamy w postaci dopasowanych do wyników numerycznych wielomianów dwóch zmiennych: stosunku mas  $m_c/m_b = \sqrt{\rho}$  oraz cięcia na energię fotonu  $\delta$ :

$$\begin{aligned} h_{28}^{(2)}(\delta) = & 0.02605 + 0.1679 \delta - 0.1970 \delta^2 + (-0.03801 + 0.6017 \delta - 0.7558 \delta^2) \rho^{\frac{1}{2}} \\ & + (2.755 - 10.03 \delta + 11.27 \delta^2) \rho + (-27.05 + 68.47 \delta - 72.51 \delta^2) \rho^{\frac{3}{2}} \\ & + (85.87 - 289.3 \delta + 297.7 \delta^2) \rho^2 + (-91.53 + 399.8 \delta - 399.9 \delta^2) \rho^{\frac{5}{2}}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Powyższy wielomian odtwarza z dużą dokładnością wyniki całkowania numerycznego dla wartości parametrów  $0 \leq \rho \leq 0.13$  oraz  $0.2 \leq \delta \leq 0.6$  ( $0.936 \text{ GeV} \leq E_0 \leq 1.872 \text{ GeV}$ ). Wartości centralne w równaniu (3.58) wynoszą  $\delta = 1 - 2(1.6/4.68) \simeq 0.316$  oraz  $\rho = [m_c(1.5 \text{ GeV})/4.68]^2 \simeq 0.0584$ .

Wartości współczynników Wilsona, skali renormalizacji i masy kwarku  $b$  są identyczne jak w przypadku analizy poprawki  $\phi_{88}^{(2)\beta_0}$  (por. rozdział 3.2.2). Ten sam zakres parametrów zostanie wykorzystany w przypadku poprawek  $K_{17}^{(2)\beta_0}$  oraz  $K_{27}^{(2)\beta_0}$ , a także  $K_{11}^{(2)\beta_0}$ ,  $K_{12}^{(2)\beta_0}$  oraz  $K_{22}^{(2)\beta_0}$  omówionych w następnym podrozdziale.

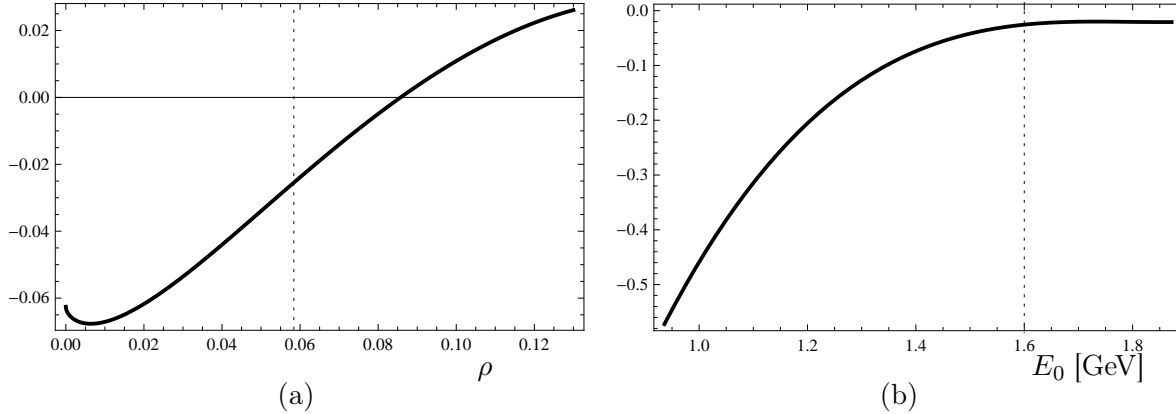
Równanie (3.58) przedstawia główny nowy wynik zamieszczony w artykule [6] stanowiąc jednocześnie jedną z podstaw niniejszej rozprawy. Wartość poprawki  $\Gamma_{28}^{(2)\beta_0}(\delta)$  znormalizowana do członu wiodącego  $\Gamma_0$  (równanie (3.7)) w zależności od kwadratu stosunku mas  $\rho = m_c^2/m_b^2$  oraz od cięcia na energię fotonu  $E_0$  została wykreślona odpowiednio na rysunkach 3.5 (a) i 3.5 (b).

Wpływ numeryczny wyniku (3.58) na stosunek rozgałęzienia  $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$  jest zaniedbywalny (poniżej 0.1%). Jednakże celem przeprowadzonego obliczenia nie było znalezienie istotnych numerycznie wkładów do wartości centralnej, lecz raczej dostarczenie danych, które umożliwią w przyszłości redukcję niepewności teoretycznych o charakterze czysto perturbacyjnym.

W przypadku poprawki  $K_{27}^{(2)\beta_0}$ , równanie (3.7) na poprawkę  $K_{ij}^{(2)\beta_0}$  musi zostać zmodyfikowane, ponieważ konieczne jest uwzględnienie wkładów od kanału rozpadu  $b \rightarrow s \gamma$ , oznaczonych literą  $T$

$$K_{27}^{(2)\beta_0} = T + 2\phi_{27}^{(2)\beta_0} \equiv T + 2\beta_0 \left[ \phi_{27}^{(1)}(\delta) L_b + h_{27}^{(2)}(\delta) \right]. \quad (3.59)$$

Wyrażenia na poprawki  $T$  zostały podane w artykule [11]. Metoda obliczenia poprawek  $h_{17}^{(2)\beta_0}$  oraz  $h_{27}^{(2)\beta_0}$  jest identyczna z metodą zastosowaną przy obliczaniu poprawek  $h_{18}^{(2)\beta_0}$  i  $h_{28}^{(2)\beta_0}$ . Ze



Rysunek 3.5: (a) Zależność poprawki  $2\Gamma_{28}^{(2)\beta_0}(\delta)/\Gamma_0[\%]$  (3.7) od stosunku  $\rho = \frac{m_c^2}{m_b^2} \in (0, 0.13)$  dla centralnej wartości parametru  $\delta = 0.316$  ( $E_0 = 1.6$  GeV). Wartość centralną stosunku  $\rho = \frac{m_c^2}{m_b^2} = 0.0584$  oznaczono pionową kropkowaną linią. (b) Zależność poprawki  $2\Gamma_{28}^{(2)\beta_0}(\delta)/\Gamma_0[\%]$  od cięcia na energię fotonu  $E_0 \in [0.93 \text{ GeV}, 1.87 \text{ GeV}]$  dla centralnej wartości stosunku  $\rho = \frac{m_c^2}{m_b^2} = 0.0584$ . Wartość centralną  $E_0 = 1.6$  GeV oznaczono pionową kropkowaną linią.

względem na brak możliwości analitycznego odcałkowania równania analogicznego do (3.57), końcowy wynik podajemy w postaci wielomianu w zmiennych  $\delta$  i  $\sqrt{\rho}$  dopasowanym do wyników całkowania numerycznego

$$\begin{aligned}
h_{27}^{(2)}(\delta) = & -0.1755 - 1.455\delta + 1.119\delta^2 + (0.7260 - 7.230\delta + 5.977\delta^2)\rho^{\frac{1}{2}} \\
& + (13.79 + 113.7\delta - 100.4\delta^2)\rho + (-145.1 - 307.1\delta + 388.5\delta^2)\rho^{\frac{3}{2}} \\
& + (475.2 + 313.0\delta - 775.8\delta^2)\rho^2 + (-509.7 - 126.1\delta + 646.2\delta^2)\rho^{\frac{5}{2}}. \quad (3.60)
\end{aligned}$$

W końcu, podobnie do związku (3.30) mamy  $K_{17}^{(2)\beta_0} = -\frac{1}{6}K_{27}^{(2)\beta_0}$ . Wykresy poprawki  $\Gamma_{27}^{(2)\beta_0}$ , analogiczne jak w przypadku poprawki  $\Gamma_{28}^{(2)\beta_0}$  zostały zamieszczone na rysunku 3.6. Wynik (3.60) jest zgodny z otrzymanym przez autorów pracy [40]. Metoda porównania zostanie omówiona nieco bardziej szczegółowo pod koniec następnego podrozdziału.

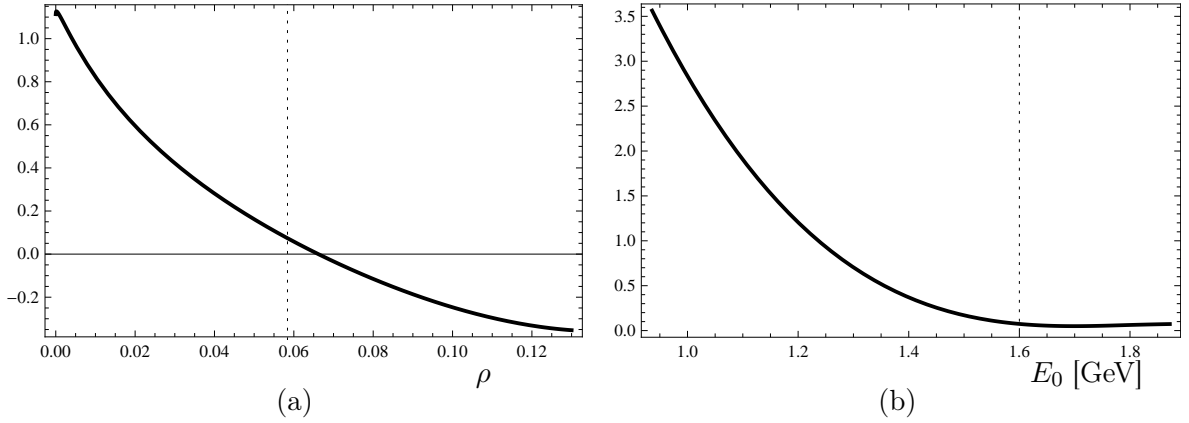
### 3.4 Poprawki $K_{11}^{(2)\beta_0}$ , $K_{12}^{(2)\beta_0}$ oraz $K_{22}^{(2)\beta_0}$

Omówimy teraz poprawki  $K_{ij}^{(2)\beta_0}$  dla  $(ij) \in \{(11), (12), (22)\}$ . Wkład do nich dają wszystkie możliwe interferencje diagramów z rysunku 3.3. Przypadki (11) i (12) różnią się od (22) jedynie czynnikiem kolorowym (analogicznie do równania (3.30)):

$$K_{22}^{(2)\beta_0} = -6K_{12}^{(2)\beta_0} = 36K_{11}^{(2)\beta_0}. \quad (3.61)$$

Podobnie jak w poprzednich przypadkach tylko diagramy z fotonem i gluonem emitowanymi z pętli kwarków  $c$  zostały uwzględnione w rachunku w przybliżeniu BLM dla kanału rozpadu





Rysunek 3.6: (a) Procentowy wkład poprawki  $2\Gamma_{27}^{(2)\beta_0}(\delta)/\Gamma_0[\%]$  (3.59) w zależności od stosunku  $\rho = \frac{m_c^2}{m_b^2} \in (0, 0.13)$  dla centralnej wartości parametru  $\delta = 0.316$ . Centralna wartość  $\rho = 0.0584$  została oznaczona pionową kropkowaną linią. (b) Analogiczny wykres, lecz w zależności od cięcia na energię fotonu  $E_0 \in [0.93 \text{ GeV}, 1.87 \text{ GeV}]$  dla centralnej wartości parametru  $\rho = 0.0584$ . Centralna wartość  $E_0 = 1.6 \text{ GeV}$  została oznaczona pionową kropkowaną linią.

$$b \rightarrow sg^*\gamma \rightarrow sq\bar{q}\gamma.$$

W przeciwieństwie do interferencji  $\overline{\mathcal{M}_2\mathcal{M}_8^*}$ , w wielkości  $|\overline{\mathcal{M}_2}|^2$  obecne są także wyrazy zawierające na przykład iloczyny funkcji  $T(\frac{v}{\rho})G(\frac{t}{\rho})$ , co skutkuje brakiem możliwości rozdzielenia całkowanej amplitudy na sumę członów zawierających logarytmy typu  $\ln[1 - (s_\rho + v_\rho)(1 - z)z]$  oraz tych zawierających logarytmy  $\ln[1 - v_\rho(1 - z)z]$ . Konsekwencją obecności w elemencie macierzowym wyrazów typu  $T(\frac{v}{\rho})G(\frac{t}{\rho})$  jest też konieczność uwzględnienia urojonych części funkcji  $G(\tau)$  oraz  $T(\tau)$ .

Całkowanie po parametrach Feynmana w granicach  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$  oraz po zmiennej  $1 - \delta < u < 1 - v$  zostało wykonane analitycznie, natomiast pozostałe całkowanie po przestrzeni fazowej było wykonane numeryczne.

Funkcja  $\phi_{22}^{(1)}$  w rzędzie NLO ma następującą postać:

$$\phi_{22}^{(1)} = \frac{16}{27} \rho \left[ \delta \int_0^{\frac{1-\delta}{\rho}} d\tau (1 - \rho\tau) \left| \frac{G(\tau)}{\tau} + \frac{1}{2} \right| + \int_{\frac{1-\delta}{\rho}}^{\frac{1}{\rho}} d\tau (1 - \rho\tau)^2 \left| \frac{G(\tau)}{\tau} + \frac{1}{2} \right| \right]. \quad (3.62)$$

Poprawka  $\phi_{22}^{(2)\beta_0}$  z kolei wyraża się przez całkę po dwóch zmiennych

$$-h_{22}^{(2)} = \int_0^{\frac{v}{\rho}} dv \int_{\frac{v}{\delta}}^{\frac{1-d+v\rho}{\rho}} dt \frac{F_1(\delta, \rho, t, v) - F_1(\delta, \rho, t, 0)}{v} + \int_0^{\frac{v}{\rho}} dv \int_{\frac{1-d+v\rho}{\rho}}^{\frac{1}{\rho}} dt \frac{F_2(\delta, \rho, t, v) - F_2(\delta, \rho, t, 0)}{v}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\frac{1}{\rho}} dt \ln \frac{t}{\rho} F_1(\delta, \rho, t, 0) + \int_{\frac{1-\delta}{\rho}}^{\frac{1}{\rho}} dt (\ln \delta - \ln(t\rho + \delta - 1)) (F_1(\delta, \rho, t, 0) - F_2(\delta, \rho, t, 0)) \\
& + \phi_{22}^{(1)}(\delta) \left( \ln \delta - \frac{5}{3} \right), \tag{3.63}
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
F_1(\delta, \rho, \tau, v) &= \frac{16}{27} \delta \rho \left[ A_1 \left| \frac{G(\tau) - G(v) + T(\tau) - T(v)}{\tau - v} + \frac{1}{2} \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + A_2 \left| \frac{G(\tau) - G(v)}{\tau - v} + \frac{1}{2} \right|^2 + A_3 \left| \frac{T(\tau) - T(v)}{\tau - v} \right|^2 \right], \\
F_2(\delta, \rho, \tau, v) &= \frac{16}{27} \rho \left[ B_2 \left| \frac{G(\tau) - G(v) + T(\tau) - T(v)}{\tau - v} + \frac{1}{2} \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + B_1 \left| \frac{G(\tau) - G(v)}{\tau - v} + \frac{1}{2} \right|^2 + B_3 \left| \frac{T(\tau) - T(v)}{\tau - v} \right|^2 \right]. \tag{3.64}
\end{aligned}$$

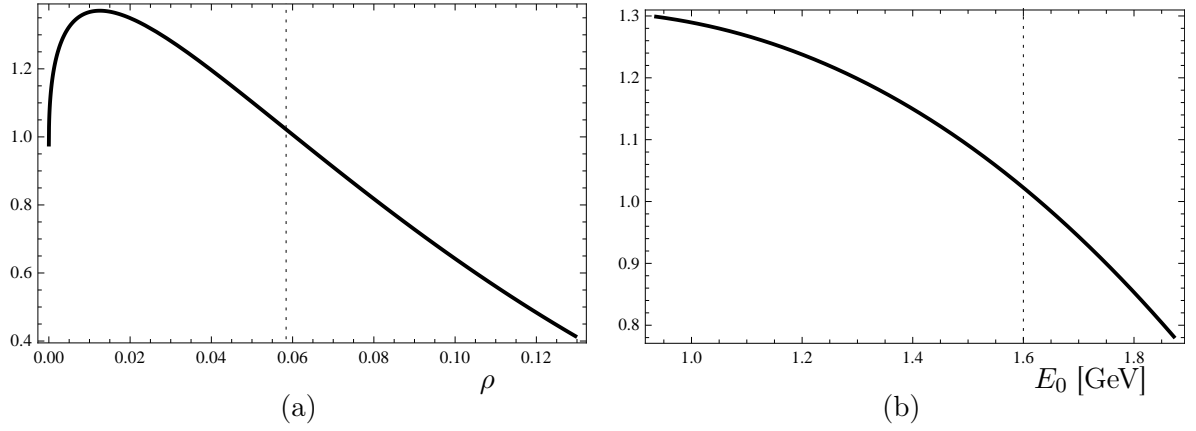
Współczynniki  $A_i$  oraz  $B_i$  dla  $i = 1, 2, 3$  zostały podane w Dodatku D. Są one wymiernymi funkcjami zmiennych  $\tau$  i  $v$  oraz parametrów  $\delta$  i  $\rho$ . W granicy  $v \rightarrow 0$  współczynniki  $A_1$ ,  $A_3$  oraz  $B_2$ ,  $B_3$  znikają, natomiast  $\lim_{v \rightarrow 0} A_2 = 1 - \rho\tau$  oraz  $\lim_{v \rightarrow 0} B_1 = (1 - \rho\tau)^2$ , z czego możemy odczytać odpowiednie wyrazy w poprawce NLO w równaniu (3.62).

Po dopasowaniu wielomianu w parametrach  $\sqrt{\rho}$  i  $\delta$  w identycznych zakresach jak w przypadku poprawek  $\phi_{28}^{(2)\beta_0}$ , otrzymano

$$\begin{aligned}
h_{22}^{(2)}(\delta) &= 0.01370 + 0.3357 \delta - 0.08668 \delta^2 + (0.3575 + 1.825 \delta - 0.3743 \delta^2) \rho^{\frac{1}{2}} \\
&+ (-2.306 - 5.800 \delta - 6.226 \delta^2) \rho + (3.449 - 0.5480 \delta + 17.27 \delta^2) \rho^{\frac{3}{2}}. \tag{3.65}
\end{aligned}$$

W celu porównania wyników z równań (3.65) i (3.60) z analogicznymi rezultatami z pracy [40] wykorzystaliśmy wyniki z tego artykułu w postaci siatki numerycznych wyników całkowania dostarczonej nam przez autorów [61]. Siatka wyników zawierała wkłady do różniczkowego spektrum energii fotonu w granicach  $0.2 m_b \leq E_\gamma \leq m_b/2$  oraz  $0 \leq \rho \leq 0.13$ . Pierwotnie opublikowane dopasowania z równania (12) w pracy [40] obowiązywały dla mniejszego zakresu parametrów, zwłaszcza w przypadku parametru  $\rho$ . Wielomian dopasowany do przekazanych nam wyników numerycznych został odcałkowany po energii fotonu  $E_\gamma$  w granicach od  $E_0$  do  $m_b/2$ . Otrzymany wynik porównano do funkcji  $h_{22}^{(2)}(\delta)$  i  $h_{27}^{(2)}(\delta)$  w granicach  $0.3 \leq \delta \leq 0.6$  oraz  $0 \leq z \leq 0.13$ , otrzymując zgodność na poziomie kilku cyfr znaczących, co uznano za potwierdzenie wyników zamieszczonych w pracy [40].

Warto zauważyć, że wkład poprawki  $\Gamma_{22}^{(2)\beta_0}$  do szerokości rozgałęzienia wynosi około 1% (patrz rysunek 3.7), natomiast zsumowane wkłady od  $h_{ij}^{(2)}$  dla  $(ij) \in \{(11), (12), (22)\}$  zwiększają tę szerokość o +1.9%. Wkład taki jest znaczący, jeśli weźmie się pod uwagę perspektywę redukcji niepewności teoretycznych w niedalekiej przyszłości, prawdopodobnie około dwukrotnie w



Rysunek 3.7: (a) Poprawka  $\Gamma_{22}^{(2)\beta_0}(\delta)/\Gamma_0[\%]$  w zależności od stosunku  $\rho = \frac{m_c^2}{m_b^2} \in (0, 0.13)$  dla centralnej wartości parametru  $\delta = 0.316$ . Centralna wartość  $\rho = 0.0584$  została oznaczona pionową kropkowaną linią. (b) Analogiczny wykres, lecz w zależności od cięcia na energię fotonu  $E_0 \in [0.93 \text{ GeV}, 1.87 \text{ GeV}]$  dla centralnej wartości parametru  $\rho = 0.0584$ . Centralna wartość  $E_0 = 1.6 \text{ GeV}$  została oznaczona pionową kropkowaną linią.

stosunku do opisanych pod koniec podrozdziału 1.2. Dlatego też dokonana w ramach niniejszej pracy niezależna weryfikacja tego wyniku jest niemniej ważna niż opisane wcześniej obliczenia nowych, lecz mniejszych numerycznie poprawek.



## Rozdział 4

# Podsumowanie

Obliczenia przedstawione w niniejszej rozprawie doktorskiej poświęcone były wyznaczeniu nieznanych dotąd poprawek do inkluzywnego radiacyjnego rozpadu  $b \rightarrow X_s^p \gamma$ . Na poziomie hadronowym rozpad ten odpowiada inkluzywnemu rozpadowi  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ . Szerokość rozpadu  $\Gamma(b \rightarrow X_s^p \gamma)$  jest zdefiniowaną perturbacyjnie wielkością, która w przybliżeniu jest równa szerokości rozpadu  $\Gamma(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ . Precyzyjna znajomość  $\Gamma(b \rightarrow X_s^p \gamma)$  jest niezbędna do porównania wyznaczonej eksperymentalnie wielkości  $\Gamma(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$  z przewidywaniami teoretycznymi. Porównanie to stanowi jeden z podstawowych testów kwantowej natury Modelu Standardowego, a także dostarcza ograniczeń na wiele rozszerzeń tej teorii. Szczególnie ważne są ograniczenia na modele z dwoma dubletami Higgsa, modele supersymetryczne czy też modele z dodatkowymi wymiarami czasoprzestrzennymi.

Autor niniejszej rozprawy wniósł wkład do wyznaczenia  $\Gamma(b \rightarrow X_s^p \gamma)$  wykonując dwa nowe rachunki. Pierwszym było obliczenie poprawek w rzędzie  $\alpha_s^2$  w przybliżeniu BLM, pochodzących od trzy- i czterociałowych stanów końcowych. Drugim rachunkiem było wyznaczenie wkładów od operatorów czterokwarkowych pojawiających się w wiodącym rzędzie w  $\alpha_s$ , ale tłumionych przez małe wartości współczynników Wilsona, a także przez przestrzeń fazową. W pierwszym przypadku obliczone zostały nieznanie wcześniej wielkości oznaczane w literaturze przez  $K_{ij}^{(2)\beta_0}$  dla  $(ij) \in \{(18), (28), (88)\}$  oraz opublikowane przedtem przez jedną tylko grupę badawczą [40] wielkości  $K_{ij}^{(2)\beta_0}$  dla  $(ij) \in \{(11), (12), (22), (17), (27)\}$ . W drugim przypadku wyznaczone zostały wszystkie wielkości  $T_{ij}^{(0)}$  dające wkład do wyrazów wiodącego rzędu  $K_{ij}^{(0)} = \delta_{i7}\delta_{j7} + T_{ij}^{(0)}$ . Wyniki przedstawione zostały odpowiednio w artykułach [6] i [7].

Wśród obliczonych poprawek największy wkład do wartości centralnej omawianego stosunku rozgałęzienia wnoszą poprawki  $K_{ij}^{(2)\beta_0}$  dla  $(ij) \in \{(11), (12), (22)\}$ . Wynosi on około 1.9%. Jest to efekt mniejszy od około 7-procentowych aktualnych błędów eksperymentalnych w pomiarze tej wielkości, oraz od podobnych niepewności teoretycznych przy jej wyznaczeniu w ramach SM, przy cięciu na energię fotonu  $E_\gamma > E_0 = 1.6 \text{ GeV}$ . Należy jednak wziąć pod uwagę oczekiwaną redukcję błędów eksperymentalnych o czynnik  $2 \div 3$  w przygotowywanych eksperymentach Belle-II [3] i Super-B [4]. Od strony teoretycznej również można się spodziewać w niedalekiej przyszłości istotnego zmniejszenia niepewności perturbacyjnych i parametrycznych. Dominujące niepewności nieperturbacyjne ( $\sim 5\%$ ) zostały dotąd przeanalizowane w całości tylko przez jedną grupę badawczą [9], i postęp w tej dziedzinie jest możliwy. Dlatego też istotne jest wyznaczenie

wszystkich poprawek perturbacyjnych, które potencjalnie mogą mieć większy niż 1% wpływ na szerokość rozważanego rozpadu.

Pozostałe z obliczonych poprawek okazały się mniejsze niż 1% przy rozważanym cięciu na energię fotonu, osiągając około 0.4% w przypadku  $T_{ij}^{(0)}$  oraz mniej niż 0.2% w przypadku pozostałych wielkości. Fakt ten mógł zostać stwierdzony tylko dzięki przeprowadzeniu pełnych obliczeń, co oznacza, że wysiłek autora włożony w ich wykonanie był w pełni uzasadniony. Ponadto, małe wartości numeryczne poprawek  $T_{ij}^{(0)}$  i  $K_{88}^{(2)\beta_0}$  są czynnikiem ułatwiającym analizę fenomenologiczną, gdyż poprawki te zawierają logarytmy kolinearne  $\ln(m_b/m_q)$ , gdzie  $m_q$  oznacza masy lekkich kwarków  $u, d, s$ . Obecność takich logarytmów oznacza, że znalezione wkłady do szerokości rozpadu partonowego mogą być jedynie bardzo zgrubnym oszacowaniem odpowiadających im wkładów do szerokości rozpadu hadronowego. Oszacowanie to otrzymaliśmy zmieniając stosunek  $m_b/m_q$  w przedziale  $[10, 50]$ , co odpowiada przyjęciu numerycznych wartości  $m_q$  rzędu mas kwarków konstytuentnych lub rzędu mas lekkich mezonów  $\pi$  i  $K$ . Gdyby obliczone  $T_{ij}^{(0)}$  i  $K_{88}^{(2)\beta_0}$  były większe, tak zgrubny sposób szacowania uniemożliwiłby utrzymanie związanej z efektami nieperturbacyjnymi niepewności w przewidywaniu teoretycznym dla  $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$  na niezmiennym poziomie ( $\sim 5\%$ ).

Obliczenia wykonywane były w ramach teorii efektywnej otrzymywanej z Modelu Standardowego przez odprężenie bozonu  $W$  oraz cięższych cząstek. Oddziaływania elektroślabe w takiej teorii opisywane są przez operatory wymiarów wyższych niż 4, a mnożące je współczynniki Wilsona spełniają rolę stałych sprzężeń. Od strony technicznej zasadniczą trudnością przeprowadzanych obliczeń było znalezienie skutecznych metod całkowania złożonych funkcji po wielowymiarowych przestrzeniach fazowych z masywnymi cząstkami w stanach końcowych. W przypadku poprawek BLM bardzo pomocna okazała się metoda Voloshina-Smitha, w której całkowanie po pędach pary  $q\bar{q}$  zastępowane jest całkowaniem po kwadracie pędu gluonu traktowanego jako cząstka zewnętrzna, ale pozostającego poza powłoką masy. W przypadku poprawek  $T_{ij}^{(0)}$  znaczne uproszczenie obliczenia osiągnięto przechodząc od regularyzacji wymiarowej rozbieżności kolinearnych do ich regularyzacji przez masy przy zastosowaniu funkcji rozszczepienia. Nie mniej istotnym elementem w tym samym rachunku było wykonanie równoległego analitycznego całkowania po czterociałowej częściowo masywnej przestrzeni fazowej z uwzględnieniem cięcia na energię fotonu. W obu przypadkach otrzymane wyniki były identyczne, potwierdzając tym samym spójność dokonanych przybliżeń.

Otrzymane rezultaty stanowią wkład do przyszłej analizy fenomenologicznej rozpadu  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ , ale same nie są wystarczające dla jej wykonania. Brakującym elementem jest poprawka NNLO oznaczana przez  $K_{27}^{(2)}$ , której obliczenie jest w toku [38]. Oczekiwane znaczenie numeryczne tej poprawki jest na tyle duże, że tylko po jej wyznaczeniu będzie możliwa aktualizacja przewidywania na szerokość rozpadu dokonanego uprzednio w pracy [11] metodą ekstrapolacji tejsze poprawki w masie kwarku  $c$  od przypadku  $m_c \gg m_b/2$  do wartości mierzonej  $m_c \sim m_b/4$ .

Rozważany w niniejszej pracy radiacyjny rozpad mezonu  $B$  jest jednym z najważniejszych procesów z neutralnymi prądami zmieniającymi zapach. Rola takich procesów w narzucaniu ograniczeń na modele wykraczające poza Model Standardowy jest komplementarna w stosunku do pomiarów prowadzonych przy najwyższych dostępnych w fizyce akceleratorowej energiach, czyli obecnie w akceleratorze LHC. Rola ta nie ulegnie zmianie również w przypadku ewentualnej obserwacji nieznanymi dotąd cząstek lub oddziaływań w eksperymentach wysokoenergetycznych. Teorie kandydujące do roli następców Modelu Standardowego muszą dostarczać poprawnego

opisu procesów zmieniających zapach, a opis tych procesów będzie nadal wymagał rozważania identycznej do obecnej lub bardzo podobnej niskoenergetycznej teorii efektywnej. Tak więc obliczenia wykonane w niniejszej pracy i podobne do nich mogą z dużym prawdopodobieństwem zachować swoją aktualność i ważność fenomenologiczną również wtedy, gdy Model Standardowy przejdzie już do historii.





# Dodatki



## Dodatek A

# Całkowanie po masywnej przestrzeni fazowej

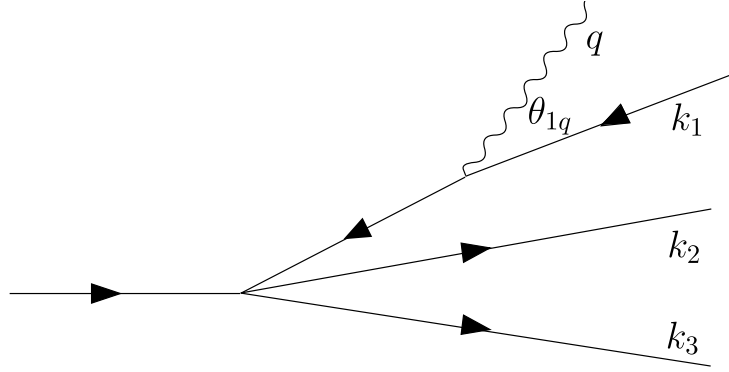
Niniejszy dodatek poświęcony jest przedstawieniu szczegółów całkowania po czterociałowej częściowo masywnej przestrzeni fazowej rozważanego w rozdziale 2 różniczkowego przekroju czynnego na proces  $b \rightarrow s\gamma q\bar{q}$ . Wykonanie tego całkowania w  $D = 4$  wymiarach było jedną z dwóch alternatywnych metod obliczenia poprawek przedstawionych w równaniach (2.1)–(2.6). Funkcję podcałkową otrzymano z interferencji amplitud drzewowych zawierających operatory typu prąd-prąd  $P_{1,2}^u$  oraz operatory pingwinowe  $P_{3-6}$ . Jest ona wymierną funkcją iloczynów pędów  $qk_i$  oraz  $k_i k_j$ , gdzie pęd  $q$  ( $q^2 = 0$ ) jest pędem fotonu, natomiast  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) są pędami kwarków w stanie końcowym.

Obliczany wkład do szerokości rozpadu zawiera logarytmy kolinearne  $\ln(\frac{m_b}{m})$ , gdzie  $m$  oznacza masę lekkiego kwarku ( $u, d, s$ ). Dążymy do wyznaczenia wyrazów zawierających logarytmy kolinearne oraz wyrazów skończonych w granicy  $m \rightarrow 0$ , ale zaniedbujemy wyrazy znikające w tej granicy, tj. wyrazy tłumione przez potęgi małego stosunku  $\frac{m}{m_b}$ . Bez utraty ogólności można przeprowadzić obliczenie zakładając dla uproszczenia, że masy wszystkich trzech lekkich kwarków są równe. Dopóki ich ładunki elektryczne są traktowane jako dowolne, można je na końcowym etapie wykorzystać do identyfikacji mas w logarytmach kolinearnych. Ze względu na stosunkowo prostą postać amplitudy, ostateczną poprawkę do szerokości rozpadu udało się wyrazić w postaci analitycznej

Główną trudnością w omawianym rachunku jest sparametryzowanie przestrzeni fazowej w taki sposób, aby można było wykonać jawne cięcie na energię fotonu już po uprzednim wyodrębnieniu dużych logarytmów postaci  $\ln(\frac{m_b^2}{m^2})$ .

### A.1 Parametryzacja czterociałowej przestrzeni fazowej

W celu odpowiedniego sparametryzowania czterociałowej przestrzeni fazowej podamy najpierw ogólne wyrażenie na całkę po przestrzeni fazowej w  $D = 4$  wymiarach dla procesu, w którym



Rysunek A.1: Przykładowa emisja fotonu z linii fermionowej.

masywna cząstka o pędzie  $p$  rozpada się na  $n$  różnych cząstek o pędach  $k_i, i = 1, \dots, n$

$$\int d\Phi_n(p; k_1, k_2, \dots) = \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - \sum_{i=1}^n k_i). \quad (\text{A.1})$$

Rozważmy przypadek  $n = 4$  i założmy, że jedna z rozważanych cząstek w stanie końcowym jest fotonem, a pozostałe – kwarkami. Zaczniemy od odseparowania przestrzeni fazowej fotonu od przestrzeni pozostałych produktów rozpadu. Niech  $q \equiv k_4$ . Wprowadźmy czterowektor  $k_{123} = k_1 + k_2 + k_3$  wstawiając do równania (A.1) dwie identyczności:

$$\begin{aligned} 1 &= \int \frac{d^4 k_{123}}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_{123} - k_1 - k_2 - k_3) \Theta(k_{123}^0), \\ 1 &= \int \frac{ds_{123}}{2\pi} 2\pi \delta(s_{123} - k_{123}^2). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Funkcja Heaviside'a  $\Theta(k_{123}^0)$  zapewnia dodatność sumy energii kwarków  $k_{123}^0 \equiv E_{123}$ .

Po wstawieniu identyczności (A.2) do równania (A.1) dla  $n = 4$ , dostajemy

$$\int d\Phi_4 = \int \frac{ds_{123}}{2\pi} d\Phi_2(p; k_{123}, q) d\Phi_3(k_{123}; k_1, k_2, k_3), \quad (\text{A.3})$$

gdzie, wykorzystując deltę Diraca  $\delta(s_{123} - k_{123}^2)$ , wykonano całkę po zmiennej  $k_{123}^0$ . W wyniku tego wektor  $k_{123}$  spełnia warunek  $k_{123}^2 = m_{123}^2 \equiv s_{123}$ . Udało nam się zatem przedstawić czterociałową przestrzeń fazową jako splot przestrzeni dwu- i trzyciałowej. Przestrzeń trzyciałowa rozpięta jest przez trójpędy kwarków w stanie końcowym, natomiast na przestrzeń dwuciałową składają się trójpęd fotonu  $\vec{q}$  oraz wektor  $\vec{k}_{123}$ .

Przestrzeń dwuciałowa jest najprostszą z możliwych przestrzeni fazowych. Przy jej analizie rozważymy początkowo ogólny przypadek  $q^2 \neq 0$  (oznaczając  $q^2 = m_\gamma^2$ ), a dopiero później położymy  $m_\gamma = 0$ . W układzie spoczynkowym kwarku  $b$  mamy  $p = (m_b, \vec{0}) \equiv (\sqrt{s}, \vec{0})$ . Obecność delty Diraca pozwala łatwo odcałkować po czterech z sześciu zmiennych. Pozostałe dwie zmienne są kątami sferycznymi  $\phi$  i  $\theta$ , określającymi położenie kierunku antyrównoległych pędów  $\vec{q}$  i  $\vec{k}_{123}$  względem dowolnie wybranej osi  $z$  układu współrzędnych. Kąty te są tzw. “ślepyimi” zmiennymi

całkowania, tzn. wysumowany po spinach różniczkowy przekrój czynny nie zależy od nich. W rezultacie dostajemy

$$\int d\Phi_2(p; k_{123}, q) = \frac{\bar{\beta}}{8\pi} \int \frac{\cos \theta}{2} \frac{d\phi}{2\pi} = \frac{\bar{\beta}}{8\pi}, \quad (\text{A.4})$$

gdzie

$$\bar{\beta} = \sqrt{1 - 2 \frac{(m_{123}^2 + m_\gamma^2)}{s} + \frac{(m_{123}^2 - m_\gamma^2)^2}{s}}. \quad (\text{A.5})$$

W przypadku, gdy  $m_\gamma = m_{123} = m$ , wielkość  $\bar{\beta} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} = \frac{v}{c}$  wyznacza prędkość produktów rozpadu. W przypadku, gdy  $m_\gamma = 0$  dostajemy

$$\bar{\beta} = 1 - \frac{m_{123}^2}{s} = 1 - \frac{s_{123}}{s}. \quad (\text{A.6})$$

W ogólnym przypadku energie cząstek dane są przez

$$E_{123} = \frac{\sqrt{s}}{2} \left( 1 + \frac{m_{123}^2}{s} - \frac{m_\gamma^2}{s} \right), \quad (\text{A.7})$$

$$E_\gamma = \frac{\sqrt{s}}{2} \left( 1 + \frac{m_\gamma^2}{s} - \frac{m_{123}^2}{s} \right). \quad (\text{A.8})$$

Natomiast, gdy  $m_\gamma = 0$  równania na energie sprowadzają się do

$$E_{123} = \frac{\sqrt{s}}{2} \left( 1 + \frac{s_{123}}{s} \right), \quad (\text{A.9})$$

$$E_\gamma = \frac{\sqrt{s}}{2} \left( 1 - \frac{s_{123}}{s} \right). \quad (\text{A.10})$$

W powyższym związku energia fotonu w układzie spoczynkowym kwarku  $b$  wyrażona jest przez niezmiennik transformacji Lorentza. Pozwala to wyznaczyć granice całkowania po zmiennej  $s_{123}$  w równaniu (A.3). Cięcie na energię fotonu  $E_\gamma > E_0$  dane jest przez bezwymiarowy parametr  $\delta = 1 - 2E_0/m_b$ . W związku z tym  $s_{123} \in (0, s\delta)$ .

Wstawiając wynik (A.4) do równania (A.3) dostajemy wyrażenie na czterociałową przestrzeń fazową

$$\int d\Phi_4 = \frac{1}{8\pi} \int \frac{ds_{123}}{2\pi} \left( 1 - \frac{s_{123}}{s} \right) d\Phi_3(k_{123}; k_1, k_2, k_3). \quad (\text{A.11})$$

Rozważmy teraz przypadek bez emisji fotonu. Niech cząstka o pędzie  $p$  ( $p^2 = m_b^2$ ) rozpada się na trzy cząstki o pędach  $k_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Energia dostępna w układzie spoczynkowym cząstki rozpadającej się wynosi  $s = m_b^2$ . Zaczniemy od wyrażenia (A.1) na całkę po przestrzeni fazowej dla przypadku  $n = 3$ . W układzie spoczynkowym cząstki rozpadającej się pędy produktów rozpadu wyznaczają płaszczyznę  $\mathcal{S}$ , której orientacja w dowolnie wybranym układzie współrzędnych sparametryzowana jest przez kąty sferyczne  $\theta$  oraz  $\phi$ . Po wykonaniu całkowania z wykorzystaniem delty Diraca dostajemy następujące wyrażenie:

$$\int d\Phi_3(p; k_1, k_2, k_3) = \frac{s}{128\pi} \int dx_1 dx_2 d\Omega_3 \frac{d\phi_{23}}{2\pi}, \quad (\text{A.12})$$

gdzie  $x_i = \frac{2pk_i}{s} = \frac{2E_i}{\sqrt{s}}$ ,  $d\Omega_3 = \frac{d\cos\theta}{2} \frac{d\phi}{2\pi}$ , a kąt  $\phi_{23}$  parametryzuje obroty wewnątrz płaszczyzny  $\mathcal{S}$ . Energie produktów rozpadu zazwyczaj są oznaczane literami  $u$  i  $t$  (patrz rozdział 3). W tym przypadku wybraliśmy jednak symbol  $x_i$  ze względu na przejrzystość numeracji pędów wyznaczających czterociałową przestrzeń fazową. Energia trzeciej cząstki wyznaczona jest przez zasadę zachowania energii  $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ .

Możemy teraz przejść do całkowania amplitudy rozpadu  $b \rightarrow s\gamma q\bar{q}$ . Całkowanie należy zacząć od wyboru kierunku czteropędu fotonu  $q$  w układzie spoczynkowym kwarku  $b$ . Niech kierunek czterowektora  $\vec{k}_{123}$  leży na dodatniej półosi osi  $z$  układu współrzędnych, wtedy

$$\begin{aligned} k_{123} &= \frac{\sqrt{s}}{2} \left( 1 + \frac{s_{123}}{s}, 0, 0, +\bar{\beta} \right) . \\ q &= \frac{\sqrt{s}}{2} \left( 1 - \frac{s_{123}}{s}, 0, 0, -\bar{\beta} \right) , \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Dokonajmy pchnięcia w kierunku  $\vec{k}_{123}$  do układu odniesienia  $\mathcal{U}_{123}$ , w którym pędy pozostałych trzech cząstek wyznaczają płaszczyznę  $\mathcal{S}$ . Transformacja Lorentza, pozwalająca wykonać pchnięcie do układu  $\mathcal{U}_{123}$  dana jest przez

$$\gamma = \frac{E_{123}}{\sqrt{s_{123}}} = \frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{s_{123}}} \left( 1 + \frac{s_{123}}{s} \right) , \quad \gamma\beta = \frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{s_{123}}} \bar{\beta} . \quad (\text{A.14})$$

Ten układ odniesienia jest układem środka masy kwarków. Wielkości zdefiniowane w tym układzie odniesienia są oznaczane przez daszek. W układzie  $\mathcal{U}_{123}$  wektory z równania (A.13) dane są przez

$$\begin{aligned} \hat{k}_{123} &= \sqrt{s_{123}} (1, 0, 0, 0) , \\ \hat{q} &= \frac{s}{2\sqrt{s_{123}}} (\bar{\beta}, 0, 0, -\bar{\beta}) . \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Niech kwark o pędzie  $k_3$  będzie zawsze w danym diagramie fermionem nieemitującym fotonu<sup>1</sup>. Możemy tak założyć, ponieważ w każdym wyrazie interferencyjnym foton jest emitowany przez co najwyżej dwa kwarki. Przeddefiniowując nazwy kwarków możemy ustalić, że pędy kwarków emitujących to  $k_1$  lub  $k_2$ . Korzystając z zasady zachowania pędu  $k_{123} = k_1 + k_2 + k_3$ , wyrażamy pęd  $k_3$  przez kombinację liniową pędów  $k_1$  i  $k_2$ . Oznaczmy kąt między wektorem  $\hat{q}$  a wektorami  $\hat{k}_1$  ( $\hat{k}_2$ ) przez  $\hat{\theta}_{1q}$  ( $\hat{\theta}_{2q}$ ). Wtedy iloczyny czteropędów w układzie  $\mathcal{U}_{123}$  są następujące:

$$\begin{aligned} qk_1 &= \frac{s}{4} \bar{\beta} \hat{x}_1 \left( 1 - \hat{v}_1 \cos \hat{\theta}_{1q} \right) , \\ qk_2 &= \frac{s}{4} \bar{\beta} \hat{x}_2 \left( 1 - \hat{v}_2 \cos \hat{\theta}_{2q} \right) , \\ qk_3 &= \frac{s}{2} \bar{\beta} - qk_1 - qk_2 , \\ k_1 k_3 &= \frac{s_{123}}{2} (1 - \hat{x}_2) , \\ k_2 k_3 &= \frac{s_{123}}{2} (1 - \hat{x}_1) , \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>ang. spectator

$$\begin{aligned}
k_1 k_2 &= \frac{1}{2} s_{123} (\hat{x}_1 + \hat{x}_2 - 1) - m^2 \\
&= \frac{s_{123}}{4} \hat{x}_1 \hat{x}_2 \left( 1 - \hat{v}_1 \hat{v}_2 \cos \hat{\theta}_{12} \right),
\end{aligned} \tag{A.16}$$

gdzie  $\hat{x}_i = \frac{2\hat{E}_i}{\sqrt{s_{123}}}$ , a kąt między wektorami  $\hat{k}_1$  i  $\hat{k}_2$  oznaczony jest przez  $\hat{\theta}_{12}$ . Zmienne

$$\hat{v}_i = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\hat{x}_i^2 s_{123}}}, \quad i = 1, 2 \tag{A.17}$$

są prędkościami kwarków w układzie  $\mathcal{U}_{123}$ . Skorzystaliśmy ponadto z zasady zachowania energii  $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 = 2$ .

## A.2 Wzmocnienie kolinearne

Rozważmy diagram Feynmana, w którym foton o pędzie  $q$  emitowany jest z linii zewnętrznej przez fermion o pędzie  $k$  i masie  $m$ . Amplituda związana tym procesem zawiera propagator postaci

$$\frac{1}{(k \pm q)^2 - m^2} = \frac{\pm 1}{2qk} = \frac{\pm 1}{2E_\gamma E_k (1 - v_k \cos \theta)}, \tag{A.18}$$

gdzie  $E_\gamma$  jest energią fotonu natomiast  $E_k$  i  $v$  są energią i prędkością fermionu. W przypadku lekkiego fermionu ( $v_k \rightarrow 1$ ) emitującego foton pod małym kątem  $\theta$ , dominujący wkład do modułu amplitudy w kwadracie dają wyrazy, w których licznik nie kompensuje mianownika propagatora (A.18). Zachodzi wtedy tzw. wzmocnienie kolinearne amplitudy<sup>2</sup>. Amplituda jest też rozbieżna, gdy  $E_\gamma \rightarrow 0$  niezależnie od masy fermionu i kąta emisji fotonu. Przedmiotem naszych rozważań jest jednak rozpad mezonu  $\bar{B}$ , któremu towarzyszy emisja wysokoenergetycznego fotonu ( $E_\gamma > 1.6\text{GeV}$ ). W tym przypadku amplituda zyskuje wzmocnienie kolinearne, a rozbieżność podczerwona jest wykluczona przez cięcie na energię fotonu.

Moduł w kwadracie amplitudy rozważanego procesu drzewowego  $b \rightarrow s\gamma q\bar{q}$  jest funkcją wymierną iloczynów czteropędów produktów rozpadu. W pierwszej kolejności rozważmy interferencję diagramów z emisją fotonu z zewnętrznych linii  $i$  i  $j$ , gdzie  $i \neq j$ , daną przez wyraz postaci

$$W_{ij} = \frac{E_\gamma^2 k_i k_j}{(qk_i)(qk_j)} = \frac{1 - v_i v_j \cos \theta_{ij}}{(1 - v_i \cos \theta_{iq})(1 - v_j \cos \theta_{jq})}. \tag{A.19}$$

Wkład do rozbieżności zawartej w funkcji  $W_{ij}$  daje w równym stopniu emisja z linii  $i$ , jak i z linii  $j$ . Możemy jednak rozseparować wkłady od każdej z linii, pisząc

$$W_{ij} = W_{ij}^{[i]} + W_{ij}^{[j]}, \tag{A.20}$$

gdzie

$$W_{ij}^{[i]} = \frac{1}{2} \left( W_{ij} + \frac{1}{1 - v_i \cos \theta_{iq}} - \frac{1}{1 - v_j \cos \theta_{jq}} \right). \tag{A.21}$$

---

<sup>2</sup>ang. collinear enhancement

W układzie  $\mathcal{U}_{123}$  postać funkcji  $W_{ij}$  pozostaje taka sama, z tym, że każda zmienna wyrażona jest w nowym układzie, co będzie oznaczane daszkami. Kontynuując na razie rozważania w układzie spoczynkowym kwarku  $b$ , zaczniemy całkowanie wyrazu  $W_{ij}^{[i]}$  od zdefiniowania zmiennych kątowych. Podobnie jak w poprzednim podrozdziale, kąt  $\theta_{iq}$  jest kątem między wektorem  $\vec{k}_i$  i pędem fotonu  $\vec{q}$ . Niech kąt  $\phi_{iq}$  będzie kątem azymutalnym między rzutem wektora  $\vec{k}_i$  na płaszczyznę prostopadłą do wektora  $\vec{q}$  a dodatnią półosią  $OX$ . Wyrażmy  $\cos \theta_{jq}$  przez  $\cos \phi_{iq}$

$$1 - v_j \cos \theta_{jq} = a - b \cos \phi_{iq}, \quad (\text{A.22})$$

gdzie

$$a = 1 - v_j \cos \theta_{ij} \cos \theta_{iq}, \quad b = v_j \sin \theta_{ij} \sin \theta_{iq}, \quad (\text{A.23})$$

gdzie  $\theta_{ij}$  jest kątem między wektorami  $\vec{k}_i$  i  $\vec{k}_j$ . Całkę po kącie  $\phi_{iq} \in [0, 2\pi]$  możemy zapisać w następujący sposób:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi_{iq}}{2\pi} W_{ij}^{[i]} = \frac{v_i}{2} \left( \frac{\cos \theta_{iq} - v_j \cos \theta_{ij}}{1 - v_i \cos \theta_{iq}} \right) I_{ij}^{[i]} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - v_i \cos \theta_{iq}}, \quad (\text{A.24})$$

gdzie

$$I_{ij}^{[i]} = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_{iq}}{2\pi} \frac{1}{1 - v_j \cos \theta_{jq}}. \quad (\text{A.25})$$

Wprowadźmy zmienną zespoloną  $z = \exp(i\phi_{iq})$ . Całkę (A.25) wyrażamy przez całkę po konturze, będącym okręgiem o promieniu  $|z| = 1$ :

$$I_{ij}^{[i]} = \frac{i}{\pi b} \oint \frac{dz}{(z - z_-)(z - z_+)}, \quad (\text{A.26})$$

gdzie  $z_{\pm} = \frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}$ . Z równania (A.23) dostajemy  $a \geq b$ , zatem tylko biegun  $z_-$  może leżeć wewnątrz jednostkowego okręgu, co prowadzi do równania

$$I_{ij}^{[i]} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \quad (\text{A.27})$$

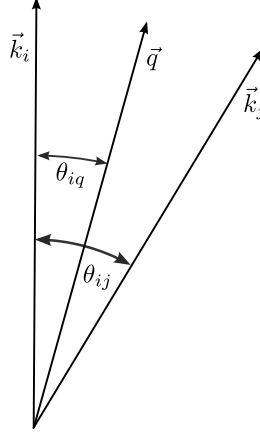
Wstawiając  $a$  i  $b$  z równania (A.23) dostajemy

$$I_{ij}^{[i]} = \frac{1}{\sqrt{(1 - v_j^2)(1 - \cos^2 \theta_{iq}) + (\cos \theta_{iq} - v_j^2 \cos \theta_{ij})^2}}. \quad (\text{A.28})$$

W równaniu (A.28) możemy położyć  $v_j \rightarrow 1$ , gdyż człon rozbieżny postaci  $1/(1 - v_j \cos \theta_{jq})$  został przesunięty do funkcji  $W_{ij}^{[j]}$ . Ostatecznie dostajemy

$$I_{ij}^{[i]} = \frac{1}{|\cos \theta_{iq} - \cos \theta_{ij}|}. \quad (\text{A.29})$$





Rysunek A.2: Kąty w równaniu (A.19). Funkcja  $W_{ij}^{[i]}$  jest tłumiona dla  $\theta_{iq} > \theta_{ij}$ .

Wstawiając powyższe wyrażenie do równania (A.24) otrzymujemy

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi_{iq}}{2\pi} W_{ij}^{[i]} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{1+v_i}{1-v_i \cos \theta_{iq}} & , \text{ gdy } \theta_{iq} < \theta_{ij} , \\ \frac{1}{2} \frac{1-v_i}{1-v_i \cos \theta_{iq}} & , \text{ gdy } \theta_{iq} > \theta_{ij} . \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

Dla wartości kąta  $\theta_{iq} > \theta_{ij}$ , po rozwinięciu prędkości  $v_i$  w potęgach  $\frac{m^2}{s}$  oraz odcałkowaniu po kolejnych zmiennych, dostajemy człony proporcjonalne do stosunku  $\left(\frac{m^2}{m_b^2}\right)^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , które zaniedbujemy w naszym rachunku. Uzasadnione jest zatem położenie w obu mianownikach  $v_i = 1$ . Prowadzi to do równania

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi_{iq}}{2\pi} W_{ij}^{[i]} = \begin{cases} \frac{1}{1-v_i \cos \theta_{iq}} & , \text{ gdy } \theta_{iq} < \theta_{ij} , \\ 0 & , \text{ gdy } \theta_{iq} > \theta_{ij} . \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

Innymi słowy, poza stożkiem wyznaczonym przez pędy pary fermionów  $i$  oraz  $j$ , prawdopodobieństwo emisji fotonu, opisane funkcją  $W_{ij}^{[i]}$ , jest tłumione przez czynnik  $\left(\frac{m^2}{m_b^2}\right)^n$  (patrz rysunek A.2).

Ta sama własność zachodzi dla funkcji  $W_{ij}^{[j]}$  po odcałkowaniu po kącie  $\phi_{jq}$  wokół linii  $j$ . Powyższa własność funkcji  $W_{ij}^{[i]}$  nazywa się uporządkowaniem kątowym<sup>3</sup>. Funkcja  $W_{ij}$  opisuje interferencję dwóch diagramów z emisją fotonu z linii  $i$  i  $j$ . W elektrodynamice zjawisko uporządkowania kąтового można zinterpretować w ten sposób, że jeśli rozważymy parę elektron-pozyton to poza stożkiem wyznaczonym przez pędy  $\vec{k}_i$  i  $\vec{k}_j$ , emisja fotonu jest tłumiona dla kątów większych niż  $\theta_{ij}$ , ponieważ foton „widzi” obiekt neutralny elektrycznie, gdyż ich ładunki elektryczne sumują się do zera. W przypadku QCD musimy uwzględnić fakt, że emitujące foton kwarki mogą mieć nie sumujące się do zera ładunki elektryczne. Rozważmy zatem sumę po wszystkich możliwych liniach fermionowych emitujących foton  $\sum_{ij} Q_i Q_j W_{ij}$ , gdzie  $Q_i$  jest ładunkiem elektrycznym emitującego kwarku. Gdy narzucimy zasadę zachowania ładunku, suma po ładunkach w wyra-

<sup>3</sup>ang. angular ordering

zach wzmocnionych kolinearnie sprowadza się do sumy po kwadratach ładunków  $\sum_{ij} Q_i^2 W_{ij}$ , gdzie każdy człon zachowuje się jak w przypadku emisji z pary elektron-pozyton.

W pozostałych wyrazach zawartych w kwadracie modułu amplitudy zjawisko uporządkowania kąтового nie zachodzi. Rozważmy dla przykładu całkowanie po kącie  $\phi_{iq}$  wyrazu postaci  $(qk_j)/(qk_i)$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi_{iq}}{2\pi} \frac{qk_j}{qk_i} = \frac{E_j}{E_i} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_{iq}}{2\pi} \frac{1 - v_j \cos \theta_{jq}}{1 - v_i \cos \theta_{iq}} = \frac{E_j}{E_i} \frac{1 - v_j \cos \theta_{ij} \cos \theta_{iq}}{1 - v_i \cos \theta_{iq}}, \quad (\text{A.32})$$

gdzie skorzystaliśmy z tożsamości (A.22).

Kolejnym etapem obliczeń jest całkowanie po  $\cos \theta_{iq}$ . W przypadku funkcji  $W_{ij}^{[i]}$  mamy  $\cos \theta_{iq} \in [\cos \theta_{ij}, 1]$ , w pozostałych przypadkach  $\cos \theta_{iq} \in [-1, 1]$ . Dla funkcji  $W_{ij}^{[i]}$  dostajemy

$$S_{ij}^{[i]} = \int_{\cos \theta_{ij}}^1 W_{ij}^{[i]} \frac{d \cos \theta_{iq}}{2} = \frac{1}{2v_i} (\ln(1 - v_i \cos \theta_{ij}) - \ln(1 - v_i)). \quad (\text{A.33})$$

Całkowanie po cosinusie kąta  $\theta_{iq}$  pozwala wyodrębnić kolinearne logarytmy mas  $\ln \frac{m^2}{m_b^2}$ . Skorzystajmy w tym celu z faktu, że postać funkcji  $W_{ij}$  nie zmienia się po zastosowaniu transformacji Lorentza. Przejdźmy do rozważanego wcześniej układu środka masy kwarków  $\mathcal{U}_{123}$ , i rozwińmy  $\hat{v}_i$  z równania (A.17) w szereg w stosunku  $\rho = \frac{m^2}{s}$

$$\hat{v}_i = \sqrt{1 - \frac{4\rho s}{s_{123}\hat{x}_i^2}} = 1 - \frac{2\rho s}{s_{123}\hat{x}_i^2} + \mathcal{O}(\rho^2). \quad (\text{A.34})$$

Wstawiając powyższy związek do równania (A.33) otrzymujemy

$$S_{ij}^{[i]} = \ln \left( 1 - \left( 1 - \frac{2\rho s}{s_{123}\hat{x}_i^2} \right) \cos \theta_{ij} \right) - \ln \left( \frac{2s}{s_{123}\hat{x}_i^2} \right) - \ln \rho. \quad (\text{A.35})$$

Dla analogicznie obliczonego przykładu z równania (A.32) dostajemy

$$\int_{-1}^1 \frac{d \cos \hat{\theta}_{iq}}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\hat{\phi}_{jq}}{2\pi} \frac{k_1 k_j}{k_1 k_i} = \cos \hat{\theta}_{ij} + \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \hat{\theta}_{ij} \right) \left( \ln \frac{s_{123}}{s} - \ln \rho + 2 \ln \hat{x}_i \right). \quad (\text{A.36})$$

Po wyodrębnieniu dużych logarytmów mas ( $\ln \rho$ ) możemy zaniedbać masy produktów rozpadu ( $m \rightarrow 0$ ), co znacznie upraszcza rachunki. Dalsze uwzględnianie niezerowej masy kwarków zmieniłoby wynik jedynie o wyrazy potęgowe w  $m/m_b$ , które do tej pory konsekwentnie zaniedbywaliśmy.

Po położeniu  $m \rightarrow 0$ , cosinus kąta między pędami  $\hat{k}_i$  i  $\hat{k}_j$  wyraża się przez funkcję wymierną ich

energii wyrażonych w układzie  $\mathcal{U}_{123}$

$$\cos \hat{\theta}_{ij} = \frac{\hat{x}_i \hat{x}_j - 2\hat{x}_i - 2\hat{x}_j + 2}{\hat{x}_i \hat{x}_j}. \quad (\text{A.37})$$

Poniżej zamieszczono listę całek niezbędnych do obliczenia rozważanego procesu  $b \rightarrow s\gamma q\bar{q}$ . Strzałka „ $\rightarrow$ ” symbolizuje całkowanie po kącie  $\hat{\phi}_{iq}$  i po  $\cos \hat{\theta}_{iq}$  w odpowiednich granicach:

$$\begin{aligned} \frac{(qk_j)^2}{(qk_i)^2} &\rightarrow \frac{(1-x_\gamma)(1-\hat{x}_i-\hat{x}_j)^2}{\hat{x}_i^2} \frac{1}{\rho}, \\ \frac{(qk_j)}{(qk_i)^2} &\rightarrow \frac{2(1-x_\gamma)(1-\hat{x}_i-\hat{x}_j)}{sx_\gamma \hat{x}_i} \frac{1}{\rho}, \\ \frac{1}{(qk_i)^2} &\rightarrow \frac{4(1-x_\gamma)}{s^2 x_\gamma^2} \frac{1}{\rho}, \\ \frac{(qk_j)^2}{(qk_i)} &\rightarrow \frac{sx_\gamma}{4\hat{x}_i} \left( -6(1-\hat{x}_i)^2 + 2(6-\hat{x}_i)(1-\hat{x}_i)\hat{x}_j - (6-\hat{x}_i(2+\hat{x}_i))\hat{x}_j^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(\ln(1-x_\gamma) + 2\ln \hat{x}_i - \ln \rho)(1-\hat{x}_i-\hat{x}_j)^4 \right), \\ \frac{(qk_j)}{(qk_i)} &\rightarrow \frac{1}{\hat{x}_i^2} ((1-\hat{x}_i-\hat{x}_j)(2+\ln \rho - \ln(1-x_\gamma) - \ln \hat{x}_i) + \hat{x}_i \hat{x}_j), \\ \frac{1}{(qk_i)(qk_j)} &\rightarrow 8 \frac{\ln \rho - \ln(1-x_\gamma) - \ln(\hat{x}_i + \hat{x}_j - 1)}{s^2 x_\gamma^2 (1-\hat{x}_i-\hat{x}_j)}, \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

gdzie  $x_\gamma = (1 - \frac{s_{123}}{s})$  odpowiada energii fotonu w układzie spoczynkowym kwarku  $b$ . Korzystając z tożsamości

$$k_i k_j = s(1-x_\gamma)(\hat{x}_i + \hat{x}_j - 1) - \rho \quad (\text{A.39})$$

dostajemy także całki wyrazów postaci  $\frac{(k_i k_j)^n}{(qk_i)(qk_j)}$ ,  $n = 1, 2$ . Również w nich wszystkie duże logarytmy mas  $\ln \rho$  zostały wyodrębnione. Możemy zatem położyć  $m = 0$  wszędzie tam, gdzie nie prowadzi to do rozbieżności.

Kolejny etap obliczeń sprowadza się do całkowania po trzyciałowej bezmasowej przestrzeni fazowej, gdzie energia dostępna w układzie środka masy kwarków wynosi  $s_{123}$ . Obszarem całkowania po energiach kwarków jest trójkąt wyznaczony przez granice  $\hat{x}_2 \in (1-\hat{x}_1, 1)$  oraz  $\hat{x}_1 \in (0, 1)$ . Na końcu całkujemy po niezmienniku  $x_\gamma$  w granicach  $x_\gamma \in (1-\delta, 1)$ , otrzymując funkcje (2.2)–(2.4).

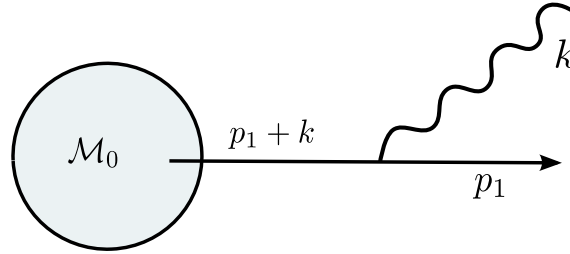


## Dodatek B

# Funkcje rozszczepienia w cechowaniu aksjalnym na stożku świetlnym

W niniejszym dodatku przedstawimy wyprowadzenie funkcji rozszczepienia zarówno w regularyzacji wymiarowej, jak i w regularyzacji przez masy. Funkcje rozszczepienia opisują rozbieżne zachowanie przekrojów czynnych lub szerokości rozpadu w sytuacji, gdy foton jest emitowany przez fermion pod małym kątem. Będziemy postępować według metody przedstawionej przez Cacciarię i Gardiego w artykule [62], gdzie obliczenia wykonane zostały w  $D = 4 - 2\epsilon$  wymiarach bez zaniechania masy emitującego fermionu. Wykorzystamy to do znalezienia różnic między przypadkiem bezmasowym w  $D = 4 - 2\epsilon$  wymiarach, oraz masywnym w  $D = 4$  wymiarach.

Rozważmy emisję fotonu o pędzie  $k$  z fermionu o ładunku  $Q$  i pędzie  $p_1$ , który po emisji jest na powłoce masy ( $p_1^2 = m^2$ ).



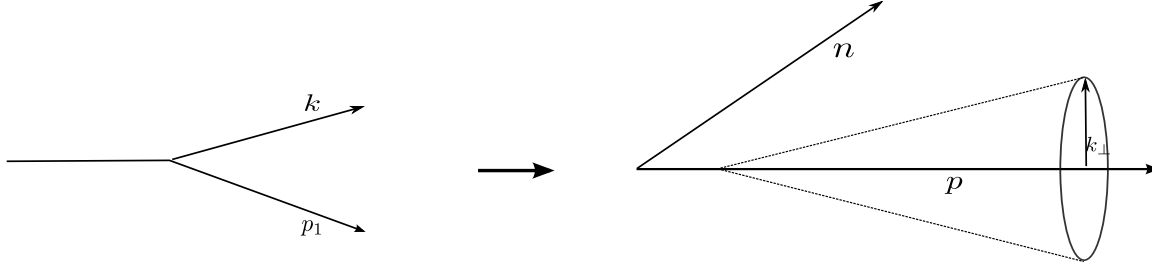
Rysunek B.1: Emisja fotonu z fermionu. Pozostałą część amplitudy symbolizuje  $\mathcal{M}_0$ .

Amplituda procesu, którego element stanowi rozważana emisja fotonu (rys. B.1), dana jest przez

$$\mathcal{M} = eQ \epsilon_\mu^{\lambda*} \frac{1}{(k + p_1)^2 - m^2} \bar{u}^{(s)}(p_1) \gamma^\mu (\not{p}_1 + \not{k} + m) \mathcal{M}_0, \quad (\text{B.1})$$

gdzie  $\epsilon_\mu^{\lambda*}$  jest wektorem polaryzacji fotonu, a  $\mathcal{M}_0$  reprezentuje pozostałą część amplitudy.

Mamy na celu obliczenie poprawek radiacyjnych związanych z rozbieżnością kolinearną w propagatorze fermionu  $1/[(p_1 + k)^2 - m^2] = 1/(2p_1 k)$ , która występuje w granicy  $m \rightarrow 0$ . Obliczenia



Rysunek B.2: Parametryzacja Sudakowa. Przestrzeń fazowa fotonu jest sparametryzowana przez zmienną  $z$  oraz pęd transversalny  $k_\perp$ , który wyznacza promień podstawy stożka kolinearnego do pędu  $p$ .

wykonywane są w cechowaniu aksjalnym, zdefiniowanym przez warunek  $n \cdot A = 0$ , gdzie  $n$  jest pewnym wektorem świetlnym ( $n^2 = 0$ ). W cechowaniu tym suma po polaryzacjach fotonu wynosi

$$d_{\mu\nu} \equiv \sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}^{\lambda} \epsilon_{\nu}^{\lambda*} = -g_{\mu\nu} + \frac{k_{\mu} n_{\nu} + k_{\nu} n_{\mu}}{kn}. \quad (\text{B.2})$$

Taki wybór cechowania sprawia, że rozbieżności kolinearne nie występują w interferencjach między diagramami Feynmana, w których foton emitowany jest z różnych linii fermionowych [63]. Można zatem rozważać oddzielnie moduły w kwadracie amplitud postaci (B.1). Po wysumowaniu po spinach otrzymujemy

$$\sum_{\text{spins}} \mathcal{M} \mathcal{M}^* = \frac{(eQ)^2}{(2p_1 k)^2} d_{\mu\nu} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + \not{k} + m) \gamma^{\nu} (\not{p}_1 + m) \gamma^{\mu} (\not{p}_1 + \not{k} + m) \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^{\dagger} \right\}. \quad (\text{B.3})$$

Porządkując wyrażenie (B.3) dostajemy

$$\sum_{\text{spins}} \mathcal{M} \mathcal{M}^* = \frac{(eQ)^2}{(2p_1 k)^2} [r_1 + r_2], \quad (\text{B.4})$$

gdzie  $r_{1,2}$  odpowiada obu wyrazom w propagatorze (B.2)

$$\begin{aligned} r_1 &= -\text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + \not{k} + m) \gamma_{\mu} (\not{p}_1 + m) \gamma^{\mu} (\not{p}_1 + \not{k} + m) \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^{\dagger} \right\}, \\ r_2 &= \frac{1}{kn} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + \not{k} + m) [\not{n} (\not{p}_1 + m) \not{k} + \not{k} (\not{p}_1 + m) \not{n}] (\not{p}_1 + \not{k} + m) \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^{\dagger} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Zaniedbanie drugiego wyrazu w sumie po polaryzacjach (B.2) byłoby równoważne wykonaniu rachunku w cechowaniu Feynmana. Wtedy wkłady do przekroju czynnego odpowiadające  $r_2$  są zawarte w członach interferencyjnych między diagramami, w których foton emitowany jest z różnych linii fermionowych.

Równania (B.5) możemy uprościć korzystając z tożsamości algebry Diraca w  $D = 4 - 2\epsilon$  wymiarach. Otrzymujemy wtedy

$$r_1 = -4m [m^2 + p_1 k] \text{Tr}(\mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^{\dagger}) - 4m^2 \text{Tr}(\not{p}_1 \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^{\dagger})$$

$$\begin{aligned}
& +4[-m^2 + (1 - \epsilon)p_1 k] \text{Tr}(\not{k} \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^\dagger), \\
r_2 &= \frac{2(2p_1 k)}{kn} \left\{ m[2p_1 n + kn] \text{Tr}(\mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^\dagger) + [2p_1 n + kn] \text{Tr}(\not{p}_1 \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^\dagger) \right. \\
& \quad \left. + p_1 n \text{Tr}(\not{k} \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^\dagger) - p_1 k \text{Tr}(\not{n} \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^\dagger) \right\}. \tag{B.6}
\end{aligned}$$

Wprowadźmy teraz parametryzację Sudakowa (patrz rysunek B.2),

$$\begin{aligned}
p^\nu &= p_1^\nu + k^\nu - \frac{p_1 k}{p_1 n + kn} n^\nu, \\
k_\perp^\nu &= z k^\nu - (1 - z) p_1^\nu + z(1 - z) [p_1 k + m^2] \frac{n^\nu}{p_1 n}, \tag{B.7}
\end{aligned}$$

gdzie

$$z = \frac{p_1 n}{p_1 n + kn}. \tag{B.8}$$

Łatwo sprawdzić, że  $p^2 = m^2$  oraz, że wektor  $k_\perp$  jest ortogonalny zarówno do  $n$ , jak i do  $p$ , tzn.  $k_\perp n = p k_\perp = 0$ . Korzystając z równania (B.8) otrzymujemy  $p_1 n = z(pn)$  oraz  $kn = (1 - z)pn$ . W układzie odniesienia, w którym  $k_\perp^\nu = (0, \vec{k}_\perp)^\nu$ , energie fotonu i fermionu w stanie końcowym dane są przez

$$\begin{aligned}
E_k &= (1 - z)E_p + \frac{\vec{k}_\perp^2 - (1 - z)^2 m^2}{(1 - z)(2pn)} n_0, \\
E_{p_1} &= zE_p + \frac{\vec{k}_\perp^2 + (1 - z^2)m^2}{z(2pn)} n_0. \tag{B.9}
\end{aligned}$$

Po odwróceniu zależności (B.7) dostajemy

$$\begin{aligned}
p_1^\nu &= z p^\nu - k_\perp^\nu + \frac{\vec{k}_\perp^2 + (1 - z^2)m^2}{z(2pn)} n^\nu, \\
k^\nu &= (1 - z)p^\nu + k_\perp^\nu + \frac{\vec{k}_\perp^2 - (1 - z)^2 m^2}{(1 - z)(2pn)} n^\nu, \tag{B.10}
\end{aligned}$$

przy czym zapis relatywistycznie niezmienniczy otrzymujemy postawiając  $\vec{k}_\perp^2 \equiv -k_\perp^\nu k_{\perp\nu}$ . W parametryzacji Sudakowa składowa transversalna  $k_\perp$  pędu fotonu określa w jakim stopniu fermion emitujący foton jest poza powłoką masy. Obecność czterowektora  $n$  w definicjach (B.7) jest konieczna do spełnienia zasady zachowania pędu. Zazwyczaj ustala się, że czterowektor  $n$  jest równoległy do pędu jednej z pozostałych wchodzących lub wychodzących cząstek składających się na amplitudę  $\mathcal{M}_0$ .

Użycie parametryzacji Sudakowa ułatwia przejście od czterociałowej przestrzeni fazowej do trzyciałowej splecionej z funkcją rozszczepienia. Wyrażając równania (B.5) w zdefiniowanych wyżej nowych zmiennych otrzymujemy

$$\begin{aligned}
r_1 &= -4m[m^2 + p_1 k] \text{Tr}(\mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^\dagger) - 2[2m^2 - (1 - \epsilon)(1 - z)(2p_1 k)] \text{Tr}(\not{p} \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^\dagger) \\
&+ 2(2p_1 k) \text{Tr}(\not{k}_\perp \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^\dagger) + \frac{(2p_1 k)}{pn} [-2(2 - z)m^2 + z(2p_1 k)] \text{Tr}(\not{n} \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^\dagger),
\end{aligned}$$

$$r_2 = 2(2p_1k) \left\{ m \frac{1+z}{1-z} \text{Tr}(\mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^\dagger) + \frac{2z}{1-z} \text{Tr}(\not{p} \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^\dagger) - \frac{1}{1-z} \text{Tr}(\not{k}_\perp \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^\dagger) + \frac{m^2}{pn} \text{Tr}(\not{n} \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^\dagger) \right\}, \quad (\text{B.11})$$

i ostatecznie

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spins}} \mathcal{M} \mathcal{M}^* &= \frac{(eQ)^2}{(2p_1k)^2} \left\{ 2m \left[ \frac{2z}{1-z} (2p_1k) - (2m^2) \right] \text{Tr}(\mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^\dagger) \right. \\ &+ 2 \left[ \frac{1+z^2}{1-z} (2p_1k) - (2m^2) - \epsilon(1-z)(2p_1k) \right] \text{Tr}(\not{p} \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^\dagger) \\ &\left. - \frac{2z}{1-z} (2p_1k) \text{Tr}(\not{k}_\perp \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^\dagger) + \frac{2p_1k}{pn} [z(2p_1k) - 2(1-z)m^2] \text{Tr}(\not{n} \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^\dagger) \right\}. \quad (\text{B.12}) \end{aligned}$$

Propagator fermionu z równania (B.1) ma w nowych zmiennych następującą postać:

$$\frac{1}{(p_1+k)^2 - m^2} = \frac{1}{2p_1k} = \frac{z(1-z)}{\vec{k}_\perp^2 + (1-z)^2 m^2}. \quad (\text{B.13})$$

W przypadku regularyzacji przez masy przejście jednocześnie z  $m^2$  i  $\vec{k}_\perp^2$  do zera, przy zachowaniu stałego stosunku  $\vec{k}_\perp^2/m^2$ , nazywa się granicą kwazikolinearną rozważanego procesu [64]. Propagator (B.13) jest w tej granicy osobliwy. Rozbieżność związana z przejściem do granicy kwazikolinearnej w przypadku masowym lub kolinearnej ( $\vec{k}_\perp \rightarrow 0$ ) w przypadku bezmasowym jest najsilniejsza w wyrazie proporcjonalnym do śladu  $\text{Tr}(\not{p} \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^\dagger)$  w równaniu (B.12). Pozostałe wyrazy po prawej stronie tego równania nie dają wkładu do rozbieżności kolinearnych, tj. odcałkowanie ich po  $\vec{k}_\perp^2$  zgodnie z opisanymi poniżej wzorami prowadzi do wyrażeń, które są skończone w granicy  $m \rightarrow 0$ . Te same skończone wyniki otrzymujemy z tych wyrazów kładąc najpierw  $m = 0$  i  $\epsilon = 0$ , a dopiero potem odcałkowując po  $\vec{k}_\perp^2$ . Dążąc do znalezienia różnicy między regularyzacjami możemy więc ograniczyć się do rozważenia wyrazu proporcjonalnego do  $\text{Tr}(\not{p} \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^\dagger)$  w równaniu (B.12):

$$X_{\text{col}} = \frac{8\pi \alpha_e Q^2}{(2p_1k)} \left[ \frac{1+z^2}{1-z} - \epsilon(1-z) - \frac{m^2}{p_1k} \right] \text{Tr}(\not{p} \mathcal{M}_0(p, n, \dots) \mathcal{M}_0^\dagger(p, n, \dots)), \quad (\text{B.14})$$

gdzie pod śladem zaznaczyliśmy jawnie zależność od wektorów  $p$  i  $n$ , a wielokropek oznacza zależność od pozostałych pędów zewnętrznych.

Amplituda  $\mathcal{M}_0(p, n, \dots)$  nie jest rozbieżna dla małych wartości  $k_\perp$ , dlatego też możemy rozwinąć jej moduł w kwadracie w szereg Taylora względem kwadratu pędu poprzecznego fotonu  $\vec{k}_\perp^2$  oraz masy  $m^2$ :

$$\text{Tr}(\not{p} \mathcal{M}_0(p, n, \dots) \mathcal{M}_0^\dagger(p, n, \dots)) = \text{Tr}(\not{p} \mathcal{M}_0(p, \dots) \mathcal{M}_0^\dagger(p, \dots)) + \mathcal{O}(\vec{k}_\perp^2, m^2). \quad (\text{B.15})$$

Wektor  $n^\mu$  jest w równaniu (B.10) mnożony przez kwadrat wektora pędu transwersalnego  $\vec{k}_\perp^2$  lub masę  $m^2$ . W konsekwencji, w pierwszym wyrazie równania (B.15) znika zależność od wektora  $n^\mu$  pochodzącego z  $d_{\mu\nu}$  w równaniu (B.3). Pierwszy wyraz po prawej stronie równania (B.15) jest zatem w granicy  $m \rightarrow 0$  wysumowanym po spinach modulem w kwadracie amplitudy



niższego rzędu w  $\alpha_e$  bez emisji fotonu. Natomiast wyższe wyrazy nie dają wkładu do rozbieżności kolinearnych, i są identyczne w obu regularyzacjach. Możemy je zatem pominąć w dalszych rozważaniach.

Wstawiając wiodący wyraz z rozwinięcia (B.15) do wyrażenia (B.14) otrzymujemy

$$X_{\text{col}} = \frac{8\pi \alpha_e Q^2}{(2p_1 k)} \left[ \frac{1+z^2}{1-z} - \epsilon(1-z) - \frac{m^2}{p_1 k} \right] \text{Tr}(\not{p} \mathcal{M}_0(p, \dots) \mathcal{M}_0^\dagger(p, \dots)), \quad (\text{B.16})$$

Zawierający rozbieżność kolinearną wkład do różniczkowego przekroju czynnego dla procesu radiacyjnego jest więc proporcjonalny do różniczkowego przekroju czynnego dla procesu niższego rzędu, bez emisji fotonu.

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym powyższym równaniu proporcjonalne jest w granicy  $m \rightarrow 0$  do funkcji rozszczepienia Alterelliego Parisiego w  $D = 4 - 2\epsilon$  wymiarach

$$\hat{P}_{qg}(z; \epsilon) = C_F \left[ \frac{1+z^2}{1-z} - \epsilon(1-z) \right], \quad (\text{B.17})$$

a w granicy  $\epsilon \rightarrow 0$  do jej uogólnienia do przypadku masowego w  $D = 4$  wymiarach

$$\hat{P}_{Qg}(z; m^2/\vec{k}_\perp^2) = C_F \left[ \frac{1+z^2}{1-z} - \frac{2z(1-z)m^2}{\vec{k}_\perp^2 + (1-z)^2 m^2} \right]. \quad (\text{B.18})$$

Rozważmy teraz  $(n+1)$ -ciałową przestrzeń fazową odpowiadającą procesowi z emisją fotonu. W przypadku, gdy foton jest kolinearny do emitującego fermionu, możliwe jest przedstawienie przestrzeni fazowej jako konwolucji przestrzeni  $n$ -ciałowej z przestrzenią fazową fotonu  $d\Phi$

$$dPS_{n+1} \cong dPS_n \otimes d\Phi. \quad (\text{B.19})$$

Powyższa relacja zachodzi dla fotonów kolinearnych i dokonuje się poprzez zamianę zmiennych daną w równaniu (B.7). Należy jednak pamiętać o modyfikacji delty Diraca obecnej w wyrażeniu na  $n$ -cząstkową przestrzeń fazową

$$\delta^{(4)} \left( p_b^\mu - \sum_i k_i^\mu \right) \rightarrow \delta^{(4)} \left( p_b^\mu - \sum_{i \neq k, p_1} k_i^\mu - p^\mu - \frac{\vec{k}_\perp^2 + (1-z)^2 m^2}{z(1-z)(2pn)} n^\mu \right), \quad (\text{B.20})$$

gdzie przez  $p_b$  oznaczyliśmy pęd stanu początkowego. Przesunięcie argumentu funkcji delty Diraca dla niezerowych  $k_\perp$  lub  $m$  mogłoby skutkować jego wyjściem poza granice całkowania po przestrzeni fazowej, o ile dokonalbysmy w niej wąskich cięć. W naszym przypadku zakładamy, że cięcia w przestrzeni fazowej są wystarczająco “rozległe” (w porównaniu ze skalą zadaną przez masę  $m$ ), że wyrazy proporcjonalne do  $n^\mu$  w argumentie delty Diraca mogą zostać pominięte przy dokonywaniu przejścia między regularyzacjami.

Przestrzeń fazowa  $d\Phi$  w równaniu (B.19) wyraża się jedynie przez zmienne  $k_\perp$  oraz  $z$ , i dana jest przez [65]

$$d\Phi = \tilde{\mu}^{2\epsilon} \frac{d^D k}{(2\pi)^{D-1}} \delta_+(k^2) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} d\vec{k}_\perp^2 \left( \frac{4\pi \tilde{\mu}^2}{\vec{k}_\perp^2} \right)^\epsilon \frac{dz}{z(1-z)} \Theta(z(1-z)), \quad (\text{B.21})$$

gdzie  $\tilde{\mu}^2 = \mu^2 e^{\gamma_E}/4\pi$ . Skorzystamy z tego wyrażenia aby odcałkować funkcję rozszczepienia po kwadracie pędu  $\vec{k}_\perp^2$ . Niech  $\theta$  oznacza kąt między pędami  $\vec{p}_1$  i  $\vec{k}$  w układzie odniesienia, w którym  $k_\perp^\nu = (0, \vec{k}_\perp)^\nu$ . W granicy  $m \rightarrow 0$  mamy  $p_1 k = E_{p_1} E_k (1 - \cos \theta)$ . Wykorzystując równanie (B.13) wyrażamy  $\cos \theta$  poprzez  $z$  i  $k_\perp$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\vec{k}_\perp^2}{2z^2(1-z)^2 E_p^2}, \quad (\text{B.22})$$

gdzie użyto następujących relacji  $E_k = (1-z)E_p$  i  $E_{p_1} = zE_p$ , spełnionych tylko dla małych wartości pędu  $k_\perp$ . Wprowadźmy mały parametr  $\zeta$ , który zapewnia, że wartość  $\theta$  pozostaje w odpowiednio wąskim stożku kolinearnym. Pozwala to natychmiast wyznaczyć granice całkowania po pędzie  $k_\perp$ :  $\vec{k}_\perp^2_{\min} = 0$  i  $\vec{k}_\perp^2_{\max} = 4\zeta z^2(1-z)^2 E_p^2$ .

Po odcałkowaniu  $X_{col}$  (B.16) po pędzie transwersalnym  $\vec{k}_\perp^2$  dostajemy w regularyzacji wymiarowej

$$d\Gamma^\epsilon = \frac{\alpha_e}{\pi} \left[ \frac{1+z^2}{1-z} \left( \frac{1}{-2\epsilon} + \ln \frac{E_p}{\mu} + \ln 2z + \ln(1-z) + \frac{1}{2} \ln \zeta \right) + \frac{1-z}{2} \right] \text{Tr}(\not{p} \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^\dagger), \quad (\text{B.23})$$

gdzie pominięto kwadrat ładunku fermionu  $Q^2$ . W przypadku regularyzacji przez masy w  $D = 4$  wymiarach otrzymujemy

$$d\Gamma^m = \frac{\alpha_e}{\pi} \left[ \frac{1+z^2}{1-z} \left( \ln \frac{E_p}{m} + \ln 2z + \frac{1}{2} \ln \zeta \right) - \frac{z}{1-z} \right] \text{Tr}(\not{p} \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_0^\dagger). \quad (\text{B.24})$$

Człony  $\ln 2z + \frac{1}{2} \ln \zeta$ , kasują się w różnicy  $d\Gamma^m - d\Gamma^\epsilon$ .

Całkowanie amplitudy w regionie dużych wartości  $k_\perp$  oznaczałoby zakładanie faktoryzacji kolinearnej poza granicami stosowalności tego przybliżenia. Trzeba by wtedy uwzględnić wyrazy z wyższymi potęgami  $\vec{k}_\perp^2$  oraz iloczyny  $qk_\perp$ , gdzie  $q$  reprezentuje pewien pęd z przestrzeni  $dPS_n$ . Jeśli jednak interesuje nas tylko różnica  $d\Gamma^m - d\Gamma^\epsilon$ , to możemy formalnie położyć  $\zeta = 1$  w równaniach (B.23) i (B.24). Prowadzi to do następujących wyrażeń na odcałkowane po  $\vec{k}_\perp^2$  funkcje rozszczepienia w obu regularyzacjach:

$$f_\gamma^\epsilon(x, E) = \frac{\alpha_e}{\pi} \left\{ \frac{1+(1-x)^2}{x} \left[ \frac{1}{-2\epsilon} + \ln \frac{E}{\mu} + \ln(2-2x) + \ln x \right] + \frac{x}{2} \right\}, \quad (\text{B.25})$$

$$f_\gamma^m(x, E) = \frac{\alpha_e}{\pi} \left\{ \frac{1+(1-x)^2}{x} \left[ \ln \frac{E}{m} + \ln(2-2x) \right] - \frac{1-x}{x} \right\}, \quad (\text{B.26})$$

gdzie  $x = 1 - z$  oraz  $E = E_p$ . Wyrażenia te zgadzają się z zamieszczonymi w pracy [54] z dokładnością do wyrazów, które kasują się w różnicy prawych stron powyższych równań.

Różnica funkcji rozszczepienia z obu regularyzacji wynosi

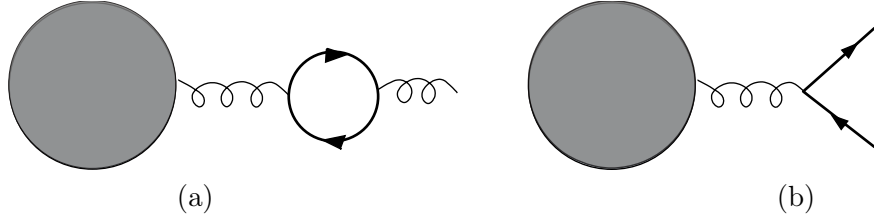
$$\Delta f(x; \epsilon, \frac{m}{\mu}) = f_m(x) - f_\epsilon(x) = \frac{\alpha_e}{2\pi} \frac{1+(1-x)^2}{x} \left[ \frac{1}{\epsilon} - 1 - 2 \ln \frac{xm}{\mu} \right]. \quad (\text{B.27})$$

Dokładnie w tej postaci została ona zastosowana w podrozdziale 2.3 przy przejściu od regularyzacji wymiarowej rozbieżności kolinearnych do ich regularyzacji przez masy.

## Dodatek C

# Metoda Voloshina-Smitha

W tym Dodatku opiszemy metodę Voloshina-Smitha [8], która zastosowana została w rozdziale 3 do obliczania poprawek radiacyjnych w przybliżeniu BLM. Choć metoda ta jest ogólna, skoncentrujemy się dla ustalenia uwagi na rozważanych w niniejszej pracy poprawkach od trzy- i cztero-ciałowych stanów końcowych do procesu  $b \rightarrow X_s^p \gamma$  w rzędzie  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ . Istotne dla nas będą jedynie wkłady proporcjonalne do liczby bezmasowych kwarków  $n_l$ . Musimy więc obliczyć diagramy z pętlą  $n_l$  wirtualnych kwarków na wychodzącej linii gluonowej (rys. C.1 (a)) oraz diagramy z emisją  $n_l$  par kwarków w stanie końcowym produkowanych z linii gluonowej (rys. C.1 (b)). Diagramy z pętlą kwarkową na wewnętrznej linii gluonowej nie występują w rozważanych poprawkach.



Rysunek C.1: Elementy diagramów Feynmana wprowadzające zależność od  $n_l$  w istotnych dla nas procesach. Wypełnione koło symbolizuje resztę procesu, w tym m.in. emisję fotonu.

Pętlowe poprawki na propagatorze gluonu są analogiczne do występujących w elektrodynamice kwantowej poprawek od polaryzacji próżni dla fotonu. Procesy z emisją pary kwarków określa się nazwą “quark Bremsstrahlung”.<sup>1</sup> W ostatnim przypadku ważny jest fakt, że uwzględnia się tylko proces  $b \rightarrow sg^* \gamma \rightarrow sq\bar{q}\gamma$ , co oznacza, że nie rozważa się emisji fotonu z pary  $q\bar{q}$ . Wkłady do szerokości rozpadu od tego rodzaju emisji nie byłyby proporcjonalne do  $n_l$ , lecz do wielomianu kwadratowego w ładunkach elektrycznych lekkich kwarków, i mogłyby zawierać rozbieżności kolinearne. W diagramach na rys. C.1 rozbieżności kolinearne nie występują, natomiast obecne są rozbieżności podczerwone związane z zaniedbaniem mas lekkich kwarków. Rozbieżności te kasują się jednak po dodaniu obu rodzajów diagramów.

Metoda Voloshina-Smitha [8] upraszcza rozważany rachunek do obliczania diagramów niższego rzędu w stałej sprzężenia  $\alpha_s$  otrzymanych poprzez usunięcie pętli kwarków  $q\bar{q}$  z propagatora glu-

<sup>1</sup>od niem. *Bremsstrahlung* – promieniowanie hamowania.

onu na rys. C.1 (a). W zamian za to konieczne staje się obliczenie tego diagramu dla dowolnego kwadratu pędu gluonu  $q^2$ , a następnie odcałkowanie po  $q^2$  według algorytmu, który zostanie przedstawiony poniżej.

W pierwszej kolejności zajmujemy się diagramami z zewnętrznymi kwarkami na powłoce masy (rys. C.1 (b)). Przy wyprowadzaniu metody Voloshina-Smitha moglibyśmy nie specyfikować pozostałych stanów końcowych omawianego procesu. Ponieważ jednak w naszym przypadku chodzi o proces  $b \rightarrow s\gamma q\bar{q}$ , rozważmy szerokość tego właśnie rozpadu:

$$\Gamma_{q\text{-brem}} = \frac{1}{2m_b} n_l \int \frac{1}{2 \cdot 3} \sum_s |\mathcal{M}_{q\text{-brem}}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2 - k_3 - k_4) \prod_{i=1}^{i=4} \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0}, \quad (\text{C.1})$$

przy czym  $k_1^2 = m_s^2$ ,  $k_2^2 = k_3^2 = k_4^2 = 0$  oraz  $k_3 + k_4 = q$ . Uśredniliśmy też po kolorze i spinie kwarku  $b$ .

Amplitudę  $\mathcal{M}_{q\text{-brem}}$  można zapisać jako iloczyn propagatora gluonu o pędzie  $q$ , oraz prądów  $f^{\mu a}$  i  $\mathcal{R}^{\nu b}$ . W cechowaniu 't Hoofta-Feynmana mamy:

$$\mathcal{M}_{q\text{-brem}} = f^{\mu a} \frac{-ig_{\mu\nu}\delta^{ab}}{q^2 + i\varepsilon} \mathcal{R}^{\nu b}, \quad (\text{C.2})$$

gdzie

$$\mathcal{R}^{\nu b} = \bar{u}(\mathbf{k}_4)(-ig_s T^b \gamma^\nu)v(\mathbf{k}_3). \quad (\text{C.3})$$

Prąd  $f^{\mu a}$  występuje w amplitudzie  $\mathcal{M}^{(1)} = f^{\mu a} \eta_\mu^a$  opisującej szerokość rozpadu

$$b_\alpha \longrightarrow s_\beta(k_1) + \gamma(k_2; \epsilon) + g_b(q; \eta) \quad (\text{C.4})$$

w wiodącym rzędzie ( $\mathcal{O}(\alpha_s)$ ), przy czym  $\eta_\mu^a$  jest wektorem polaryzacji gluonu,  $k_1^2 = m_s^2$ ,  $k_2^2 = 0$  oraz  $q^2 \neq 0$ . Przykładami diagramów Feynmana dających wkład do  $\mathcal{M}^{(1)}$  są diagramy w pierwszych kolumnach rysunków 3.1 i 3.3.

Obliczając moduł w kwadracie amplitudy  $\mathcal{M}^{(1)}$ , a następnie sumując (uśredniając) po spinach, polaryzacjach i kolorach, otrzymujemy

$$\frac{1}{2 \cdot 3} \sum_{spin, pol, col} |\mathcal{M}^{(1)}|^2 = -\frac{1}{6} f^{\mu a} f_\mu^{\dagger a}, \quad (\text{C.5})$$

gdzie zastosowaliśmy podstawienie

$$\sum_{\lambda=1}^3 \eta_\mu^a \eta_\nu^b \rightarrow -g_{\mu\nu} \delta^{ab}. \quad (\text{C.6})$$

W przypadku  $q^2 = 0$  poprawność tego podstawienia można uzasadnić korzystając z tożsamości Warda-Takahashiego  $f_\mu^a q^\mu = 0$ . Możliwość skorzystania z podstawienia (C.6) w przypadku  $q^2 \neq 0$  w naszych rozważaniach poniżej będzie wynikała z własności wyrażenia (C.2), które jest naszym punktem wyjścia.

Zdefiniujmy szerokość rozpadu z gluonem poza powłoką masy:

$$\Gamma^{(1)}(q^2) = -\frac{1}{2m_b} \int \frac{1}{2 \cdot 3} f^{\mu a} f_{\mu}^{\dagger a} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2 - q) \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2k_1^0} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2k_2^0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2q^0}. \quad (\text{C.7})$$

Dla  $q^2 = 0$  jest ona fizyczną (perturbacyjną) szerokością rozpadu  $b \rightarrow s\gamma g$  w rzędzie  $\mathcal{O}(\alpha_s)$ .

Wróćmy do amplitudy (C.2). Jej moduł w kwadracie wynosi

$$|\mathcal{M}_{q-\text{brem}}|^2 = f^{\mu a} \frac{-i}{q^2 + i\varepsilon} \mathcal{R}_{\mu}^a \mathcal{R}_{\nu}^{\dagger b} \frac{i}{q^2 - i\varepsilon} f^{\dagger \nu b}. \quad (\text{C.8})$$

Wysumowanie po spinach kwarków daje

$$\sum_{\text{spin}} \mathcal{R}^{\mu a} \mathcal{R}^{\dagger \nu b} = g_s^2 \frac{1}{2} \delta^{ab} 4(k_3^{\mu} k_4^{\nu} + k_3^{\nu} k_4^{\mu} - k_3 k_4 g^{\mu\nu}), \quad (\text{C.9})$$

gdzie skorzystaliśmy z tożsamości  $\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}$ . Podstawiając  $k_3 k_4 = \frac{q^2}{2}$  oraz  $k_4 = q - k_3$  otrzymujemy

$$\sum_{\text{spin}} \mathcal{R}^{\mu a} \mathcal{R}^{\dagger \nu b} = 2g_s^2 \delta^{ab} (-2k_3^{\mu} k_3^{\nu} + k_3^{\mu} q^{\nu} + k_3^{\nu} q^{\mu} - \frac{q^2}{2} g^{\mu\nu}), \quad (\text{C.10})$$

co prowadzi do

$$\sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_{q-\text{brem}}|^2 = g_s^2 f^{\mu a} f^{\dagger \nu a} (-4k_3^{\mu} k_3^{\nu} - q^2 g^{\mu\nu}) \frac{1}{q^4 + \varepsilon^2}. \quad (\text{C.11})$$

Człony liniowe w pędzie  $q$  z równania (C.10) nie dają wkładu do powyższego wyniku ze względu na tożsamość Warda-Takahashiego  $f_{\mu}^a q^{\mu} = 0$ .

Wstawiając równanie (C.11) do (C.1) otrzymujemy

$$\Gamma_{q-\text{brem}} = -\frac{g_s^2}{2m_b} \int \frac{1}{2 \cdot 3} f_{\mu}^a f_{\nu}^{\dagger a} (4k_3^{\mu} k_3^{\nu} + q^2 g^{\mu\nu}) \frac{1}{q^4 + \varepsilon^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2 - k_3 - k_4) \prod_{i=1}^{i=4} \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0}. \quad (\text{C.12})$$

Po dokonaniu zamiany zmiennych całkowania  $k_4 = q - k_3$ ,

$$\frac{d^3 k_4}{2k_4^0} = d^4 k_4 \delta(k_4^2) \Theta(k_4^0) = d^4 q \delta((q - k_3)^2) \Theta(q^0 - k_3^0), \quad (\text{C.13})$$

równanie (C.12) możemy zapisać jako sumę dwóch całek  $\mathcal{I}_1^{\mu\nu}(q^2)$  i  $\mathcal{I}_2^{\mu\nu}(q^2)$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{q-\text{brem}} &= -\frac{g_s^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2m_b} \int \frac{1}{2 \cdot 3} f_{\mu}^a f_{\nu}^{\dagger a} (4\mathcal{I}_1^{\mu\nu} + q^2 \mathcal{I}_2^{\mu\nu}) \frac{1}{q^4 + \varepsilon^2} \times \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2 - q) \prod_{i=1}^2 \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

gdzie

$$\mathcal{I}_1^{\mu\nu}(q^2) = \int k_3^{\mu} k_3^{\nu} \delta((q - k_3)^2) \Theta(q^0 - k_3^0) \frac{d^3 k_3}{2k_3^0}, \quad (\text{C.15})$$

$$\mathcal{I}_2^{\mu\nu}(q^2) = g^{\mu\nu} \int \delta((q - k_3)^2) \Theta(q^0 - k_3^0) \frac{d^3 k_3}{2k_3^0}. \quad (\text{C.16})$$

Pierwszą z nich  $\mathcal{I}_1^{\mu\nu}(q^2)$  możemy zapisać przy pomocy dwóch całek skalarnych  $A$  i  $B$ :

$$\mathcal{I}_1^{\mu\nu} = Aq^2 g^{\mu\nu} + Bq^\mu q^\nu. \quad (\text{C.17})$$

Zwężając podwójnie  $\mathcal{I}_1^{\mu\nu}$  z pędem  $q$  dostajemy:

$$q_\mu q_\nu \mathcal{I}_1^{\mu\nu} = \int (qk_3)^2 \delta((q - k_3)^2) \Theta(q^0 - k_3^0) \frac{d^3 k_3}{2k_3^0} = (A + B)q^4. \quad (\text{C.18})$$

Korzystając z  $k_3^2 = 0$ , dostajemy  $k_3^0 = |\mathbf{k}_3|$ . Wprowadzamy kąt  $\theta$ , pomiędzy pędem gluonu a pędem kwarku  $k_3$ ,  $\mathbf{q}\mathbf{k}_3 = |\mathbf{q}||\mathbf{k}_3|\cos\theta$ . Następnie wykonujemy poniższe podstawienia w całce (C.18):

$$\begin{aligned} qk_3 &= q^0 k_3^0 - |\mathbf{q}||\mathbf{k}_3|\cos\theta = |\mathbf{k}_3|(q^0 - |\mathbf{q}|\cos\theta), \\ (q - k_3)^2 &= q^2 - 2qk_3 = q^2 - 2|\mathbf{k}_3|(q^0 - |\mathbf{q}|\cos\theta), \\ \delta((q - k_3)^2) &= \frac{1}{2(q^0 - |\mathbf{q}|\cos\theta)} \delta\left(|\mathbf{k}_3| - \frac{q^2}{2(q^0 - |\mathbf{q}|\cos\theta)}\right). \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Otrzymujemy:

$$q_\mu q_\nu \mathcal{I}_1^{\mu\nu} = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty d|\mathbf{k}_3| (q^0 - |\mathbf{q}|\cos\theta) |\mathbf{k}_3|^3 \sin\theta \Theta(q^0 - |\mathbf{k}_3|) \delta\left(|\mathbf{k}_3| - \frac{q^2}{2(q^0 - |\mathbf{q}|\cos\theta)}\right) \quad (\text{C.20})$$

i w rezultacie

$$q_\mu q_\nu \mathcal{I}_1^{\mu\nu} = \frac{\pi}{16} q^6 \int_0^\pi d\theta \frac{\sin\theta}{(q^0 - |\mathbf{q}|\cos\theta)^2} = \frac{\pi}{8} q^4. \quad (\text{C.21})$$

Wynika stąd, że  $A + B = \frac{\pi}{8}$ . Łatwo można sprawdzić, że

$$\int_0^\pi d\theta \frac{\sin\theta}{(q^0 - |\mathbf{q}|\cos\theta)^2} = \frac{2}{q_0^2 - |\mathbf{q}|^2} = \frac{2}{q^2}. \quad (\text{C.22})$$

Zwężając  $\mathcal{I}_1^{\mu\nu}$  z  $g_{\mu\nu}$  dostajemy

$$g_{\mu\nu} \mathcal{I}_1^{\mu\nu} = \int k_3^2 \delta((q - k_3)^2) \Theta(q^0 - k_3^0) \frac{d^3 k_3}{2k_3^0} = (4A + B)q^2 = 0. \quad (\text{C.23})$$

Skorzystaliśmy z  $k_3^2 = 0$ . Dostajemy zatem  $A = -\frac{\pi}{24}$  oraz  $B = \frac{\pi}{6}$ . Ostatecznie

$$\mathcal{I}_1^{\mu\nu} = -\frac{\pi}{24} q^2 g^{\mu\nu} + \frac{\pi}{6} q^\mu q^\nu. \quad (\text{C.24})$$

Obliczmy następnie całkę

$$\mathcal{I}_2^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \int \delta((q - k_3)^2) \Theta(q^0 - k_3^0) \frac{d^3 k_3}{2k_3^0}. \quad (\text{C.25})$$

Wykonując te same podstawienia dostajemy:

$$\mathcal{I}_2^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \frac{\pi}{4} q^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(q^0 - |\mathbf{q}| \cos \theta)^2} = g^{\mu\nu} \frac{\pi}{2} \quad (\text{C.26})$$

Wstawiając wyznaczone całki  $\mathcal{I}_1^{\mu\nu}$  i  $\mathcal{I}_2^{\mu\nu}$  do równania (C.14), i korzystając po raz kolejny z tożsamości  $f_\mu^a q^\mu = 0$ , otrzymujemy

$$\Gamma_{q\text{-brem}} = -\frac{g_s^2}{(2\pi)^3} \frac{\pi}{3} \frac{1}{2m_b} \int \frac{1}{2 \cdot 3} f_\mu^a f^{\mu a} \frac{q^2}{q^4 + \varepsilon^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2 - q) \prod_{i=1}^{i=2} \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2q_0} dq_0^2. \quad (\text{C.27})$$

Zapiszmy inaczej miarę całkowania  $d^3 q = |\mathbf{q}|/2 \sin \theta d\varphi d\theta d|\mathbf{q}|^2$ . Korzystając z relacji  $q_0^2 = q^2 + |\mathbf{q}|^2$  dokonajmy zamiany zmiennych całkowania  $(|\mathbf{q}|^2, q_0^2) \rightarrow (|\mathbf{q}|^2, q^2)$ . Jakobian tej transformacji wynosi  $|J| = 1$ . Porównując następnie postać otrzymanego wyniku w wyrażeniu (C.7) stwierdzamy, że

$$\Gamma_{q\text{-brem}} = \frac{g_s^2}{24\pi^2} n_l \int_0^\infty \Gamma^{(1)}(q^2) \frac{q^2}{q^4 + \varepsilon^2} \Theta(m_b^2 \delta - q^2) dq^2. \quad (\text{C.28})$$

W równaniu (C.28) uwzględniono liczbę bezmasowych kwarków  $n_l$  oraz wprowadzono cięcie na energię fotonu  $\Theta(m_b^2 \delta - q^2)$ . Parametr  $\varepsilon$  w mianowniku, pochodzący z równania (C.2) pełni rolę regulatora całki (C.28), która w granicy  $\varepsilon \rightarrow 0$  staje się rozbieżna. Dopiero uwzględnienie poprawek z pętlą kwarków na gluonie (rys. C.1) skasuje rozbieżności podczerwone, związane z zaniedbaniem pary zewnętrznych kwarków i pozwoli położyć  $\varepsilon = 0$ .

Obliczymy teraz diagram z pętlą kwarkową na gluonie (rys. C.1) Wkład od tej pętli do dwupunktowej funkcji Greena dla gluonu dany jest przez [66]

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(q) = -(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \Pi(q^2) \delta^{ab}, \quad (\text{C.29})$$

gdzie

$$\Pi(q^2) = \frac{g_s^2}{4\pi^2} n_l \Gamma(\epsilon) \left( \frac{4\pi\mu_b^2}{-q^2 - i\varepsilon} \right)^\epsilon \int_0^1 dx (x(1-x))^{1-\epsilon}, \quad (\text{C.30})$$

a  $\mu_b$  jest skalą renormalizacji. Po rozwinięciu (C.30) w szereg Laurenta względem  $\epsilon$  i odcałkowaniu po zmiennej Feynmana  $x$  dostajemy

$$\Pi(q^2) = \frac{g_s^2}{24\pi^2} n_l \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \left( \frac{-q^2 - i\varepsilon}{4\pi\mu_b^2} \right) + \frac{5}{3} \right) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (\text{C.31})$$

Powyższy wynik można zapisać jako całkę po parametrze  $\lambda$ , który ma wymiar masy

$$\Pi(q^2) = \frac{g_s^2}{24\pi^2} n_l \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi + \int_0^\infty \left( \frac{1}{\lambda^2 - q^2 - i\varepsilon} - \frac{1}{\lambda^2 + \mu_b^2} \right) d\lambda^2 + \frac{5}{3} \right). \quad (\text{C.32})$$

Amplitudę procesu z pętlą kwarkową na zewnętrznym gluonie możemy zapisać używając prądu

$f_\mu^a$ 

$$\mathcal{M}_{\text{virt}}^{\text{bare}} = \frac{1}{2} \lim_{q^2 \rightarrow 0} f_\mu^a \frac{-ig^{\mu\nu} \delta^{ab}}{q^2 + i\varepsilon} i\Pi_{\nu\sigma}^{bc}(q^2) \eta^{c\sigma} = -\frac{1}{2} f_\mu^a \eta^{a\mu} \Pi(q^2 = 0) = -\frac{1}{2} \mathcal{M}^{(1)}(q^2 = 0) \Pi(q^2 = 0). \quad (\text{C.33})$$

Stosujemy tu konwencję, w której nie renormalizuje się funkcji falowych, ale poprawki pętlowe na liniach zewnętrznych dzieli się przez “2”. W takiej sytuacji do wyznaczonego powyżej  $\mathcal{M}_{\text{virt}}^{\text{bare}}$  musimy dodać wkład od renormalizacji stałej sprzężenia  $g_s$  w wierzchołku, z którego emitowany jest gluon. Wkład ten wynosi

$$\mathcal{M}_{\text{ren}} = (Z_g^{n_l} - 1) \mathcal{M}^{(1)}(q^2 = 0), \quad (\text{C.34})$$

gdzie

$$Z_g^{n_l} = \frac{g_s^2 n_l}{48\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi \right) \quad (\text{C.35})$$

jest proporcjonalnym do  $n_l$  wyrazem w stałej renormalizacyjnej  $Z_g$  występującej w relacji  $g_s^{\text{bare}} = Z_g g_s$  w schemacie  $\overline{\text{MS}}$ . Dodając wyniki (C.33) i (C.34) stwierdzamy, że

$$\mathcal{M}_{\text{virt}} = \mathcal{M}_{\text{virt}}^{\text{bare}} + \mathcal{M}_{\text{ren}} = -\frac{1}{2} \mathcal{M}^{(1)}(q^2 = 0) \Pi^{\overline{\text{MS}}}(q^2 = 0) \quad (\text{C.36})$$

gdzie

$$\Pi^{\overline{\text{MS}}}(q^2 = 0) = \frac{g_s^2 n_l}{24\pi^2} \left( \int_0^\infty \left( \frac{1}{\lambda^2 - i\varepsilon} - \frac{1}{\lambda^2 + \mu_b^2} \right) d\lambda^2 + \frac{5}{3} \right). \quad (\text{C.37})$$

Wkład rzędu  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  do szerokości rozpadu dostaniemy z członu interferencyjnego  $\mathcal{M}^{(1)}$  z  $\mathcal{M}_{\text{virt}}$

$$\left| \mathcal{M}^{(1)} - \frac{1}{2} \mathcal{M}^{(1)} \Pi^{\overline{\text{MS}}}(0) \right|^2 = \left( 1 - \text{Re} \Pi^{\overline{\text{MS}}}(0) + \frac{1}{4} |\Pi^{\overline{\text{MS}}}(0)|^2 \right) \left| \mathcal{M}^{(1)} \right|^2. \quad (\text{C.38})$$

Z równania (C.38) widzimy, że wkład do szerokości rozpadu rzędu  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  wynosi

$$\Gamma_{\text{virt}} = -\Gamma^{(1)}(0) \text{Re} \Pi^{\overline{\text{MS}}}(0). \quad (\text{C.39})$$

Wstawiając (C.37) do (C.39) dostajemy:

$$\Gamma_{\text{virt}} = -\frac{g_s^2}{24\pi^2} n_l \Gamma^{(1)}(0) \left( \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{\lambda^4 + \varepsilon^2} d\lambda^2 - \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2 + \mu_b^2} d\lambda^2 + \frac{5}{3} \right). \quad (\text{C.40})$$

Całą poprawkę do szerokości rozpadu  $b \rightarrow X_s^p \gamma$  rzędu  $\mathcal{O}(\alpha_s^2 n_l)$  otrzymujemy po zsumowaniu



obu wkładów wyznaczonych w równaniach (C.28) i (C.40)

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(2)n_l} &= \Gamma_{q\text{-brem}} + \Gamma_{\text{virt}} \\
&= -\frac{g_s^2}{16\pi^2} \left(-\frac{2}{3}n_l\right) \left\{ \int_0^\infty \left[ \frac{\Gamma^{(1)}(\lambda^2)\Theta(m_b^2\delta - \lambda^2) - \Gamma^{(1)}(0)}{\lambda^2} + \frac{\Gamma^{(1)}(0)}{\lambda^2 + \mu_b^2} \right] d\lambda^2 - \frac{5}{3}\Gamma^{(1)}(0) \right\},
\end{aligned} \tag{C.41}$$

przy czym w drugim kroku dokonaliśmy zmiany nazwy zmiennej całkowania  $q^2$  na  $\lambda^2$  w równaniu (C.28). Ponadto, położyliśmy  $\varepsilon = 0$ , gdyż rozbieżności podczerwone obecne w całkach (C.28) i (C.40) kasują się, i całka (C.41) jest zbieżna.

Całka po  $\lambda^2$  w wyrażeniu (C.41) jest często nazywana całką po „masie” gluonu. W istocie jest to całka po kwadracie energii dostępnej w układzie spoczynkowym gluonu rozpadającego się na parę  $\bar{q}q$ . Możliwe jest zdefiniowanie takiego układu, jeśli gluon pozostaje poza powłoką masy. Przejście z „masą” gluonu do zera skutkuje pojawieniem się rozbieżności, która jest kasowana przez wkłady z poprawką od polaryzacji próżni dla gluonu w stanie końcowym. Równanie (C.41) jest zgodne z równaniem (11) z artykułu [8].

Liczba  $n_l$  bezmasowych kwarków jest powiązana z funkcją  $\beta_0$  przez równanie (3.2). Ostateczne wyrażenie na poprawkę w przybliżeniu BLM otrzymujemy zatem przez prostą zmianę normalizacji równaniu (C.41) zgodnie z algorytmem opisanym na początku rozdziału 3. Wprowadzając bezwymiarową zmienną  $v = \lambda^2/m_b^2$  oraz wykonując jawnie elementarne całki występujące w (C.41) dostajemy

$$\Gamma^{(2)\beta_0} = -\frac{\alpha_s}{4\pi}\beta_0 \left[ \int_0^\delta \frac{\Gamma^{(1)}(v) - \Gamma^{(1)}(0)}{v} dv + \Gamma^{(1)}(0) \left( \ln \delta - \frac{5}{3} - L_b \right) \right], \tag{C.42}$$

gdzie  $L_b = \ln(\mu_b^2/m_b^2)$ . Powyższy wynik jest identyczny z równaniem (3.9), które zastosowaliśmy do obliczenia wszystkich poprawek w rozdziale 3.



## Dodatek D

### Funkcje podcałkowe dla poprawki

$$K_{22}^{(2)\beta_0}$$

Przedstawiamy tutaj jawną postać współczynników  $A_i$  oraz  $B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) z równania (3.64). Są one funkcjami zmiennych  $\tau$  i  $v$  oraz parametrów  $\delta$  i  $\rho$ .

$$\begin{aligned}
 A_1 = & \frac{v}{(\tau-v)^2} \left[ \tau^2 \left( \frac{2\delta^2}{3} + \delta\rho\tau - 2\delta + \rho^2\tau^2 - 2\rho\tau + 1 \right) \right. \\
 & + v\tau \left( -2\rho\tau(\rho\tau - 2) - \frac{(1-\rho\tau)^2}{\delta} + 3\delta(1-\rho\tau) - \frac{4\delta^2}{3} \right) \\
 & + v^2 \left( -3 + \rho^2\tau^2 + \frac{1}{\delta}(2\rho^2\tau^2 - 5\rho\tau + 2) + \delta(2\rho\tau + 1) \right) \\
 & \left. + v^3 \left( \frac{\rho(3-\rho\tau)}{\delta} - \frac{2}{3\delta\tau} - 2\rho \right) + \frac{v^4}{3\delta\tau^2} \right], \\
 A_2 = & \frac{1}{(\tau-v)^2} \left[ \tau^2 - \rho\tau^3 + v\tau \left( -\rho^2\tau^3 - \rho^2\tau^2 + 2\rho\tau^2 + 7\rho\tau - \tau - 6 + \frac{\rho\tau - 1}{\delta} \right) \right. \\
 & - \delta(\rho\tau^2 + \rho\tau - 2\tau - 3) - \frac{2}{3}(1+\tau)\delta^2 \Big) + v^2 \left( 2\rho^2\tau^2(\tau+1) - \rho\tau(4\tau+13) + 7 \right. \\
 & + \frac{(1-\rho\tau)((\tau+6-\rho\tau(\tau+1))}{\delta} - (3(\tau+5-\rho\tau(\tau+1))\delta + \frac{4}{3}\delta^2(\tau+1) \Big) \\
 & + v^3 \left( -\rho^2\tau^2 - \rho^2\tau + 7\rho + 3 + \frac{-2\rho^2\tau^2 - 2\rho^2\tau + 5\rho\tau + 14\rho - \frac{10}{\tau} - 2}{\delta} \right. \\
 & + \delta(-2\rho\tau - 2\rho - 1) \Big) + v^4 \left( \frac{\rho^2\tau}{\delta} + \frac{\rho^2}{\delta} - \frac{10\rho}{\delta\tau} - \frac{3\rho}{\delta} + \frac{17}{3\delta\tau^2} + \frac{2}{3\delta\tau} + 2\rho \right) \\
 & \left. + v^5 \left( \frac{2\rho}{\delta\tau^2} - \frac{4}{3\delta\tau^3} - \frac{1}{3\delta\tau^2} \right) \right],
 \end{aligned}
 \tag{D.1}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{v}{(\tau-v)^2} \left[ -\rho^2\tau^5 + (\rho - \rho^2)\tau^4 + 2\rho\tau^3 - \tau^2 + \delta\tau^2(2 + \tau(1 - \rho) - \rho\tau^2) , \right. \\
&\quad -\frac{2}{3}\tau^2\delta^2(1 + \tau) + v \left( \tau^2(2\rho^2\tau^2 + 2\rho^2\tau - \rho\tau - 4\rho - 1) + \frac{\tau(1 - \rho\tau)(1 - \rho\tau^2 - \rho\tau)}{\delta} \right. \\
&\quad \left. + \delta\tau(3\rho\tau^2 + 3\rho\tau - \tau - 3) + \frac{4}{3}d^2\tau(\tau + 1) \right) + v^2 \left( -\rho^2\tau^3 - \rho^2\tau^2 - 3\rho\tau^2 + 2\tau + 3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\rho^2\tau^3 + 2\rho^2\tau^2 - 2\rho\tau^2 - 5\rho\tau + 2}{\delta} - \delta(2\rho\tau^2 + 2\rho\tau + 2\tau + 1) \right) \\
&\quad \left. + v^3 \left( 3\rho\tau + 2\rho + 1 + \frac{3\rho^2\tau^3 + 3\rho^2\tau^2 - 9\rho\tau - \tau + 2}{3\delta\tau} \right) + v^4 \left( \frac{3\rho\tau^2 - \tau - 1}{3d\tau^2} \right) \right] \\
B_1 &= (1 - \rho\tau)^2 \left[ 1 - \frac{(2\rho\tau^2 - 2\rho\tau + \tau + 8)}{3\tau}v + \frac{3}{\tau^2}v^2 + \frac{2\rho\tau^2 - 2\rho\tau + \tau - 4}{3\tau^3}v^3 \right] , \\
B_2 &= \frac{1}{3}(1 - \rho\tau)^2(2\rho\tau + 1) \left( 1 - \frac{v^2}{\tau^2} \right) v , \\
B_3 &= \frac{1}{3}(1 - \rho\tau)^2(2\rho\tau + 1)(t - 1) \left( 1 - \frac{v^2}{\tau^2} \right) v .
\end{aligned}
\tag{D.2}$$

# Literatura

- [1] M. Misiak et al. „Estimate of  $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$  at  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ ”. *Phys. Rev. Lett.*, 98:022002, 2007, [arXiv:hep-ph/0609232](#).
- [2] S. Stone. Plenary talk at the *International Conference on High Energy Physics (ICHEP 2012)*. Melbourne, Australia, July 4-11th, 2012.
- [3] T. Abe. „Belle II Technical Design Report”. 2010, [arXiv:1011.0352](#) [[physics.ins-det](#)].
- [4] B. O’Leary et al. „SuperB Progress Reports – Physics”. 2010, [arXiv:1008.1541](#) [[hep-ex](#)].
- [5] S. L. Glashow, J. Iliopoulos i L. Maiani. „Weak interactions with lepton-hadron symmetry”. *Phys. Rev. D*, 2:1285–1292, Oct 1970.
- [6] M. Misiak i M. Poradziński. „Completing the calculation of BLM corrections to  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ ”. *Phys. Rev.*, D83:014024, 2011, [arXiv:1009.5685](#) [[hep-ph](#)].
- [7] M. Kamiński, M. Misiak i M. Poradziński. „Tree-level contributions to  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ ”. 2012, [arXiv:1209.0965](#) [[hep-ph](#)].
- [8] B. H. Smith i M. B. Voloshin. „Normalization of QCD corrections in top quark decay”. *Phys. Lett.*, B340:176–180, 1994, [arXiv:hep-ph/9405204](#).
- [9] M. Benzke, S. J. Lee, M. Neubert i G. Paz. „Factorization at subleading power and irreducible uncertainties in  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  decay”. *JHEP*, 1008:099, 2010, [arXiv:1003.5012](#) [[hep-ph](#)].
- [10] P. Gambino i M. Misiak. „Quark mass effects in  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ ”. *Nucl. Phys.*, B611:338–366, 2001, [arXiv:hep-ph/0104034](#).
- [11] M. Misiak i M. Steinhauser. „NNLO QCD corrections to the  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  matrix elements using interpolation in  $m_c$ ”. *Nucl. Phys.*, B764:62–82, 2007, [arXiv:hep-ph/0609241](#).
- [12] M. Misiak. „QCD challenges in radiative B decays”. *AIP Conf.Proc.*, 1317:276–283, 2011, [arXiv:1010.4896](#) [[hep-ph](#)].
- [13] A. H. Hoang i A. V. Manohar. „Charm quark mass from inclusive semileptonic B decays”. *Phys. Lett.*, B633:526–532, 2006, [arXiv:hep-ph/0509195](#).
- [14] C. W. Bauer, Z. Ligeti, M. Luke, A. V. Manohar i M. Trott. „Global analysis of inclusive B decays”. *Phys. Rev.*, D70:094017, 2004, [arXiv:hep-ph/0408002](#).

- [15] K. Chetyrkin, J.H. Kühn, A. Maier, P. Maierhofer, P. Marquard et al. „Precise charm- and bottom-quark masses: theoretical and experimental uncertainties”. *Theor. Math. Phys.*, 170:217–228, 2012, [arXiv:1010.6157 \[hep-ph\]](#).
- [16] K.G. Wilson. „Non-lagrangian models of current algebra”. *Phys. Rev.*, 179:1499–1512, 1969.
- [17] G. 't Hooft i M.J.G. Veltman. „Regularization and renormalization of gauge fields”. *Nucl. Phys.*, B44:189–213, 1972.
- [18] A. J. Buras i M. Münz. „Effective Hamiltonian for  $B \rightarrow X_s e^+ e^-$  beyond leading logarithms in the NDR and HV schemes”. *Phys. Rev.*, D52:186–195, 1995, [arXiv:hep-ph/9501281](#).
- [19] K. G. Chetyrkin, M. Misiak i M. Münz. „Weak radiative  $B$ -meson decay beyond leading logarithms”. *Phys. Lett.*, B400:206–219, 1997, [arXiv:hep-ph/9612313](#).
- [20] M. Misiak i M. Steinhauser. „Three loop matching of the dipole operators for  $b \rightarrow s\gamma$  and  $b \rightarrow sg$ ”. *Nucl. Phys.*, B683:277–305, 2004, [arXiv:hep-ph/0401041](#).
- [21] M. Czakon, U. Haisch i M. Misiak. „Four-loop anomalous dimensions for radiative flavour-changing decays”. *JHEP*, 03:008, 2007, [arXiv:hep-ph/0612329](#).
- [22] S. Bertolini, F. Borzumati i A. Masiero. „QCD enhancement of radiative  $B$  decays”. *Phys. Rev. Lett.*, 59:180, 1987.
- [23] N.G. Deshpande, P. Lo, J. Trampetic, G. Eilam i P. Singer. „ $\bar{B} \rightarrow K^* \gamma$  and the top quark mass”. *Phys. Rev. Lett.*, 59:183–185, 1987.
- [24] A. J. Buras, A. Czarnecki, M. Misiak i J. Urban. „Completing the NLO QCD calculation of  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ ”. *Nucl. Phys.*, B631:219–238, 2002, [arXiv:hep-ph/0203135](#).
- [25] A. J. Buras i M. Misiak. „ $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  after completion of the NLO QCD calculations”. *Acta Phys. Polon.*, B33:2597–2612, 2002, [arXiv:hep-ph/0207131](#).
- [26] T. Hurth, E. Lunghi i W. Porod. „Untagged  $\bar{B} \rightarrow X_{s+d} \gamma$  CP asymmetry as a probe for new physics”. *Nucl. Phys.*, B704:56–74, 2005, [arXiv:hep-ph/0312260](#).
- [27] T. Hurth, E. Lunghi i W. Porod. „Updated NLL results for  $\bar{B} \rightarrow X_{s,d} \gamma$  in and beyond the SM”. *Eur. Phys. J.*, C33:S382–S384, 2004, [arXiv:hep-ph/0310282](#).
- [28] H.M. Asatryan, C. Greub, A. Hovhannisyan, T. Hurth i V. Poghosyan. „Reduction of charm quark mass scheme dependence in  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  at the NNLL level”. *Phys. Lett.*, B619:322–332, 2005, [arXiv:hep-ph/0505068](#).
- [29] C. Bobeth, M. Misiak i J. Urban. „Photonic penguins at two loops and  $m_t$ -dependence of  $BR[B \rightarrow X_s l^+ l^-]$ ”. *Nucl. Phys.*, B574:291–330, 2000, [arXiv:hep-ph/9910220](#).
- [30] M. Gorbahn i U. Haisch. „Effective Hamiltonian for non-leptonic  $|\Delta F| = 1$  decays at NNLO in QCD”. *Nucl. Phys.*, B713:291–332, 2005, [arXiv:hep-ph/0411071](#).
- [31] M. Gorbahn, U. Haisch i M. Misiak. „Three-loop mixing of dipole operators”. *Phys. Rev. Lett.*, 95:102004, 2005, [arXiv:hep-ph/0504194](#).

- [32] K. Melnikov i A. Mitov. „The photon energy spectrum in  $B \rightarrow X_s + \gamma$  in perturbative QCD through  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ ”. *Phys. Lett.*, B620:69–79, 2005, [arXiv:hep-ph/0505097](#).
- [33] H. M. Asatrian et al. „NNLL QCD contribution of the electromagnetic dipole operator to  $\Gamma(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ ”. *Nucl. Phys.*, B749:325–337, 2006, [arXiv:hep-ph/0605009](#).
- [34] H. M. Asatrian, T. Ewerth, A. Ferroglia, P. Gambino i C. Greub. „Magnetic dipole operator contributions to the photon energy spectrum in  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  at  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ ”. *Nucl. Phys.*, B762:212–228, 2007, [arXiv:hep-ph/0607316](#).
- [35] H. M. Asatrian, T. Ewerth, H. Gabrielyan i C. Greub. „Charm quark mass dependence of the electromagnetic dipole operator contribution to  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  at  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ ”. *Phys. Lett.*, B647:173–178, 2007, [arXiv:hep-ph/0611123](#).
- [36] H.M. Asatrian, T. Ewerth, A. Ferroglia, C. Greub i G. Ossola. „Complete  $(\mathcal{O}_7, \mathcal{O}_8)$  contribution to  $B \rightarrow X_s \gamma$  at order  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ ”. *Phys. Rev.*, D82:074006, 2010, [arXiv:1005.5587 \[hep-ph\]](#).
- [37] T. Ewerth. „Fermionic corrections to the interference of the electro- and chromomagnetic dipole operators in  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  at  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ ”. *Phys. Lett.*, B669:167–172, 2008, [arXiv:0805.3911 \[hep-ph\]](#).
- [38] M. Czakon, R. N. Lee, M. Misiak, A. V. Smirnov, V. A. Smirnov i M. Steinhauser. praca w przygotowaniu.
- [39] S.J. Brodsky, G.P. Lepage i P.B. Mackenzie. „On the elimination of scale ambiguities in perturbative quantum chromodynamics”. *Phys. Rev. D*, 28(1):228, 1983.
- [40] A.V. Manohar Z. Ligeti, M.E. Luke i M.B. Wise. „The  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  photon spectrum”. *Phys. Rev.*, D60:034019, 1999, [arXiv:hep-ph/9903305](#).
- [41] A. Ferroglia i U. Haisch. „Chromomagnetic dipole-operator corrections in  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$  at  $\mathcal{O}(\beta_0 \alpha_s^2)$ ”. *Phys. Rev.*, D82:094012, 2010, [arXiv:1009.2144](#).
- [42] K. Bieri, Ch. Greub i M. Steinhauser. „Fermionic NNLL corrections to  $b \rightarrow s \gamma$ ”. *Phys. Rev.*, D67:114019, 2003, [arXiv:hep-ph/0302051](#).
- [43] M. Misiak i M. Steinhauser. „Large- $m_c$  asymptotic behaviour of  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  corrections to  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ ”. *Nucl. Phys.*, B840:271–283, 2010, [arXiv:1005.1173 \[hep-ph\]](#).
- [44] A. Czarnecki i W. J. Marciano. „Electroweak radiative corrections to  $b \rightarrow s \gamma$ ”. *Phys. Rev. Lett.*, 81:277–280, 1998, [arXiv:hep-ph/9804252](#).
- [45] A. L. Kagan i M. Neubert. „QCD anatomy of  $B \rightarrow X_s \gamma$  decays”. *Eur. Phys. J.*, C7:5–27, 1999, [arXiv:hep-ph/9805303](#).
- [46] K. Baranowski i M. Misiak. „The  $\mathcal{O}(\alpha_{em}/\alpha_s)$  correction to  $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ ”. *Phys. Lett.*, B483:410–416, 2000, [arXiv:hep-ph/9907427](#).
- [47] P. Gambino i U. Haisch. „Electroweak effects in radiative  $B$  decays”. *JHEP*, 0009:001, 2000, [arXiv:hep-ph/0007259](#).

- [48] M.E. Peskin i D.V. Schroeder. „An introduction to quantum field theory”. *Perseus Books, Reading*, 1995.
- [49] C.F. von Weizsäcker. „Radiation emitted in collisions of very fast electrons”. *Z.Phys.*, 88:612–625, 1934.
- [50] E. J. Williams. „Nature of the high energy particles of penetrating radiation and status of ionization and radiation formulae”. *Phys. Rev.*, 45:729–730, 1934.
- [51] Inc. Wolfram Research. *Mathematica Edition: Version 7.0*. Wolfram Research, Inc., 2008.
- [52] T. Hahn. „Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3”. *Comput. Phys. Commun.*, 140:418–431, 2001, [arXiv:hep-ph/0012260](#).
- [53] M. Kamiński. „Wkłady do diagramów drzewowych od procesów radiacyjnego rozpadu mezonu  $B$ ”. Praca magisterska, Uniwersytet Warszawski, 2007.
- [54] T. Huber, E. Lunghi, M. Misiak i D. Wyler. „Electromagnetic logarithms in  $\bar{B} \rightarrow X_s l^+ l^-$ ”. *Nucl. Phys.*, B740:105–137, 2006, [arXiv:hep-ph/0512066](#).
- [55] G. Altarelli i G. Parisi. „Asymptotic freedom in parton language”. *Nucl. Phys. B*, 126(2):298–318, 1977.
- [56] A. Gehrmann-De Ridder, T. Gehrmann i G. Heinrich. „Four particle phase space integrals in massless QCD”. *Nucl. Phys.*, B682:265–288, 2004, [arXiv:hep-ph/0311276](#).
- [57] Heavy Flavor Averaging Group, Y. Amhis, Sw. Banerjee, R. Bernhard, S. Blyth et al. „Averages of b-hadron, c-hadron, and tau-lepton properties as of early 2012”. 2012, [arXiv:1207.1158 \[hep-ex\]](#).
- [58] R. Boughezal, M. Czakon i T. Schutzmeier. „NNLO fermionic corrections to the charm quark mass dependent matrix elements in  $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ ”. *JHEP*, 0709:072, 2007, [arXiv:0707.3090 \[hep-ph\]](#).
- [59] A. Ali i C. Greub. „Photon energy spectrum in  $\bar{B} \rightarrow X_s + \gamma$  and comparison with data”. *Phys. Lett.*, B361:146–154, 1995, [arXiv:hep-ph/9506374 \[hep-ph\]](#).
- [60] A. Ali i C. Greub. „Inclusive photon energy spectrum in rare  $B$  decays”. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, 49:431–438, 1991. 10.1007/BF01549696.
- [61] M. Misiak. prywatna korespondencja z Z. Ligeti, 2007.
- [62] M. Cacciari i E. Gardi. „Heavy-quark fragmentation”. *Nucl. Phys.*, B664:299–340, 2003, [arXiv:hep-ph/0301047](#).
- [63] E. Gardi. „Dressed gluon exponentiation”. *Nucl. Phys.*, B622:365–392, 2002, [arXiv:hep-ph/0108222](#).
- [64] S. Catani, S. Dittmaier i Z. Trocsanyi. „One loop singular behavior of QCD and SUSY QCD amplitudes with massive partons”. *Phys. Lett.*, B500:149–160, 2001, [arXiv:hep-ph/0011222](#).



- [65] M. Cacciari i S. Catani. „Soft-gluon resummation for the fragmentation of light and heavy quarks at large  $x$ ”. *Nucl. Phys.*, B617:253–290, 2001, [arXiv:hep-ph/0107138](#).
- [66] T. Muta. „Foundations of QCD”. *World Scientific, Singapore*, 1987.